Staatliche Bibliothek
Regensburg
Philos. 5093

SBR069026560615

23 Geschenk
v. Dr Steinberger

Johann v. Sniadecki's,

Ritters des St. Annen-Ordens, Kaiserl. Russ. Astronomen und Rectors der Kaiserl. Universität in Wilna, Mitgliedes mehrerer gelehrten Gesellschaften 2c.

sphärische Trigonometrie

in

analytischer Darstellung.

Mit Anwendung

auf die Ausmessung der Erde und auf die sphärische Astronomie,

zum

Gebrauche öffentlicher Vorlesungen.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

Aus dem Polnischen nach der zweiten stark vermehrten Original-Ausgabe übersetzt, und mit einer tabellarischen Uebersicht der vorzüglichsten und am häufigsten vorkommenden Formeln begleitet

von

L. Feldt,

Professor der höhern Mathematik an dem Königl. Lyceum zu Braunsberg in Ost-Preußen.

BIBLIOTHEK REGENSBURG

Mit 2 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei E. B. Schwickert.
1828.

Rachować, iestto rozumować z pewnościa.

JAN SNIADECKI.

Staatliche Bibliothek
Regensburg

Meinen Lehrern,

dem Herrn

Dr. Heinrich Wilhelm Brandes,

öffentlichem ordentlichen Professor der Physik an der Königl. Sächs. Universität in Leipzig rc.

und

dem Herrn

Dr. Ludwig Anton Jungnitz,

öffentlichem ordentlichen Professor der practischen Astronomie und Physik an der Königl. Preuß. Universität in Breslau, Canonicus rc.

hochachtungsvoll

und

mit dankbarer Verehrung

gewidmet

von

Laur. Feldt.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

Vorrede
zur ersten Ausgabe.

Die sphärische Trigonometrie, welche ehemals beinahe nur in der Astronomie ihre Anwendung fand, ist gegenwärtig zu einem wesentlichen Theile der angewandten Mathematik geworden. Sie ist es, welche einen bedeutenden Theil der analytischen Rechnungsmethode ausmacht, und das Eindringen in die höhern Theile der mathematischen Wissenschaften auf eine ganz vorzügliche Weise erleichtert. Bei vielen Aufgaben stoßen wir auf Gleichungen, die vermittelst des sphärischen Dreiecks leicht gelös't werden können; es begegnen uns bei tiefern analytischen Untersuchungen Schwierigkeiten, die durch diesen Zweig der Mathematik oft glücklich überwunden werden; bei der Ausmessung eines großen Landes, und bei der Anfertigung genauer Karten über ein solches, kann man die sphärische Trigonometrie heutiges Tages nicht mehr entbehren. Wer irgend, und wenn auch nur wenig, mit dem jetzigen Zustande der mathematischen Wissenschaften befreundet ist, muß eingestehen, daß die Rechnung mit trigonometrischen Linien nicht nur ein allgemeines, sondern auch zugleich das vorzüglichste Hülfsmittel in denselben sey. Mangel an Uebung und Fertigkeit in dieser Rechnungsart hält gleich beim Anfange den Lernenden im Fortschreiten zurück. Nichts übt aber bei den verschiedenen Umformungen der trigonometrischen Formeln mehr, als die sphärische Trigonometrie; einen Beweis hiervon liefert die ganze gegenwärtige Schrift, in

welcher ich mich bemüht habe, allen unnöthigen Formeln und Gleichungen auszuweichen. Denn analytische Gleichungen, welche entweder den Gang einer Rechnung nicht erleichtern, oder nicht zur Entdeckung einer neuen Wahrheit leiten, oder auch die bereits erkannte Wahrheit nicht unter einem einfachern Gesichtspuncte darstellen, sind unnütze Schreckbilder in den Büchern für Anfänger, durch welche die Aufmerksamkeit nur gestört und unterbrochen wird, statt daß sie der größten Schonung zur genauen Auffassung des unter die Rechnung gezogenen Gegenstandes bedarf.

Euler war der erste unter den Analysten, der die sphärische Trigonometrie, welche ehedem ziemlich verworren, beim Gebrauche zeitraubend und in ihren Grundsätzen unzusammenhängend war, in einer analytischen Abhandlung auf das Klarste darstellte, indem er aus drei Gleichungen den Inhalt aller zur Auflösung eines sphärischen Dreiecks nöthigen Lehrsätze auf eine lichtvolle Weise entwickelte *). Nach langer vergeblicher Bemühung, dieser Wissenschaft noch mehr Einfachheit zu geben, trat Lagrange im Jahre 1798 glücklich auf, und leitete aus einer einzigen Gleichung die ganze Reihe von Wahrheiten für das sphärische Dreieck ab **). Eine Wissenschaft auf die kleinste Anzahl von Grundwahrheiten zurück zu bringen, ist ein großer Schritt zu ihrer Vervollkommnung. Dem Lernenden muß diese Kunst nicht fremd bleiben, wofern er den Nutzen der Analysis ahnden soll. Aus dem Grunde wurde nun hier die Darstellung dieses Gegenstandes in unsrer Sprache, mit der Auseinandersetzung meiner eigenen Beweise für mehr oder weniger bekannte Gleichungen, unternommen. Die Untersuchungen über den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks hoffe ich durch Anwen-

*) Acta Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae pro Anno 1779, pars prior pag. 72.

**) Journal de l'Ecole Polytechnique, sixième Cahier pag. 270.

dungen auf die practische Ausmessung eines Landes dem Lernenden deutlich gemacht zu haben.

In der von mir schon 1783 gelieferten Algebra *) nahm ich mir vor, die reine Logik dieser Rechnungsart auseinander zu setzen, an die Stelle einiger ziemlich schlechten und schwachen Beweise eigene zu stellen, und auf diese Weise eine Sammlung bewiesener Formeln und Sätze, die unumgänglich nothwendig beim tiefern Eindringen in den Calcul sind, zu veranstalten. Im vierten Capitel des zweiten Theiles der genannten Algebra wird gewiesen, daß der Lehrer keine der da aufgestellten Gleichungen bei Schülern, welche sich zu Forschungen in den höheren Theilen der Mathematik vorbereiten wollen, nach Willkühr übergehen darf. Seit 34 Jahren, seit der Bekanntmachung jenes Buches, ist mir in den Werken der ausgezeichneten Geometer, welche die trigonometrischen Functionen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gewählt haben, noch keine, von den in der Algebra auseinandergesetzten Operationen abhängige, Gleichung vorgekommen, bei welcher es mir nicht gelungen wäre, dieselbe aus den in diesem Capitel aufgestellten Sätzen zu erhalten. Weil aber bei einigen von diesen Gleichungen die Rechnung etwas zusammengesetzter erscheint: so sind sie mit gehörigen Beweisen in der gegenwärtigen Schrift angeführt. Indem nun auch hiermit das Bedürfniß der sphärischen Astronomie befriedigt wird, betrachte ich das Werkchen als Anhang zu meiner Algebra, um den Lernenden auch mit diesem Theile der Analysis und mit denjenigen neuen geometrischen Wahrheiten vertraut zu machen, zu deren Entdeckung die Ausmessung Frankreichs geführt hat, welche mit solchem Ruhme und Nutzen vollendet wurde, wie es kein Beispiel von einer ähnlichen Unternehmung in der Geschichte der Wissenschaften giebt. Es wird gewiß niemand den

*) Anmerkung. Rachunku algebraicznego Teorya przystósowana do linii krzywych. II. Tomy, w Krakowie 1783. [F]

großen Nutzen der Mathematik bezweifeln; aber durch die Bekanntschaft mit den Elementen allein gelangt kein Land zu dem so oft gerühmten Nutzen, und sie allein geben einer Nation kein Anrecht, sich zu den gründlich gelehrten Nationen zu zählen. Um aber zum Forschen in den höheren Theilen der mathematischen Wissenschaften glücklich ausgerüstet zu erscheinen und den wahren Geistesgenuß eines denkenden Wesens zu empfinden, müssen die Grundlehren genau gefaßt werden. Es war deshalb das vorgesetzte Ziel meines Lebens, der Jugend so viel als möglich den Weg zu dieser hohen Wissenschaft zu erleichtern; aber des Landes Schicksal legte mir mühsame Verrichtungen auf, welche weder mit meinem Berufe noch mit meinem Willen übereinstimmend waren, und erlaubte mir nicht die Ausführung dieses Vorsatzes *). Am Schlusse meines Lebens wollte ich noch etwas für diese Jugend thun, deren Wohl zu befördern mir zum Wonnegefühl wird.

Wilna, an der Kaiserl. Universität,
den $\frac{12}{24}$. Februar 1817.

---

*) Anmerkung. Einen schönen Zug aus dem thätigen Leben des Herrn Verfassers findet der Leser in der Biographie des verstorbenen Astronomen v. Poczobut, pag. 30. sqq. Die Schrift ist unter folgendem Titel erschienen: „Zywot uczony i publiczny Marcina Odlanickiego Poczobuta. Czytany na publiczném posiedzenice Imperatorskiego Wileńskiego Uniwersytetu przy zamknięciu rocznego biegu nauk dnia 30 Czerwca R. 1810. Przez Jana Sniadeckiego tegóz Uniwersytetu Rektora etc. [F]

Der Verfasser.

Vorrede
zur zweiten Ausgabe.

Der glückliche Erfolg im Betreiben der mathematischen Wissenschaften bei unsrer Jugend ist Ursache, daß die zweite Auflage von diesem Buche eher erscheint, als ich hoffen konnte. Diese schöne Neigung zu den Wissenschaften, welche dem menschlichen Verstande seine wahre Richtung anweiset, und gewissermaaßen als Haltpunct beim Aussuchen der Wahrheit erscheint, zugleich aber zur gründlichen und wirklich wissenschaftlichen Aufklärung eines Volkes führt, ist der Aufmunterung werth. Deswegen bemühte ich mich, diese Ausgabe durch Hinzusetzung vieler und wichtiger Wahrheiten, Bemerkungen und Erläuterungen bedeutend zu vermehren, ohne den Plan und die einmal anfänglich festgesetzte Ordnung zu stören. Es wurde unter dem 6. §. der ersten Ausgabe, und unterm 8. §. der gegenwärtigen bemerkt, daß vier Gleichungen, nämlich die Fundamentalgleichung und die aus ihr hergeleiteten drei Hauptgleichungen, die gesammte Trigonometrie enthalten; daß alle bis jetzt bekannten und künftig noch zu entdeckenden Gleichungen und Sätze von dem

sphärischen Dreiecke sind und nur immer seyn werden eine mehr oder weniger scharfsinnige, mehr oder weniger tiefgedachte Transformation dieser Gleichungen; deshalb suchte ich die in den analytischen Werken neu entdeckten Wahrheiten von dem sphärischen Dreiecke, welche nur zu oft in denselben durch eine langwierige und verworrene Rechnung abgeleitet werden, hier auf eine leichte Art aus den besagten Gleichungen zu erhalten und ihre Anwendung zu zeigen. Es wurden auch Aufgaben beigegeben, welche den Gang der Rechnung bei der Auflösung einiger Fälle des sphärischen Dreiecks oft bedeutend abkürzen.

Im sphärischen Dreiecke kann jedes Stück als ein geradliniger Winkel, welcher auf verschiedenen Ebenen liegt, betrachtet werden; in demselben werden einige Winkel von den Radien der Kugel an ihrem Mittelpuncte, andere hingegen von den Ebenen, welche die Kugel durchschneiden, eingeschlossen. Es ist klar, daß durch diese Ueberlegung wir es nur mit gleichartigen Größen im sphärischen Dreiecke zu thun haben. Diese Ueberlegung brachte mich auf den Gedanken, daß die Eigenschaft des ebenen Dreiecks, auf welche uns Euclid hinweiset, welche der analytischen Darstellungsart Eingang in die sphärische Trigonometrie verschafft hat, diesen früher so dunklen und verworrenen Zweig der Mathematik so bedeutend erleichtert hat und zur Quelle wichtiger Entdeckungen geworden ist; dieselbe Eigenschaft, dachte ich, müßte alle Lehren der ebenen Trigonometrie enthalten. Es ist mir auch wirklich gelungen, aus dieser Eigenschaft auf eine leichte und einfache Weise alle Sätze der ebenen Trigonometrie abzuleiten, und dadurch sind denn beide auf den

ersten Blick so verschiedene Zweige der Mathematik auf ein und dasselbe Princip zurückgebracht. Es ist dieß eine Wohlthat der geometrischen Analysis, Wahrheiten, dem Scheine nach unendlich weit entfernt, einander immer näher und näher zu bringen, was man auf einem andern Wege unmöglich würde haben erreichen können.

Schon sind beinahe vierzig Jahre hin, daß ich mir die gesammten Theile der Mathematik als eine einzige Algebra, welche uns die griechischen Geometer in einer doppelten Ansicht überliefert haben, dachte. Die erste Ansicht ist in den zwei von mir schon 1783 herausgegebenen Bänden niedergelegt, wo Vorbereitungen zum tiefern Forschen in der Größenlehre vorkommen; die zweite Ansicht, welche die Differential- und Integralrechnung enthalten sollte, erlaubte mir des Landes Schicksal nicht auszuarbeiten. Immer noch von dem einmal festgestellten Princip ausgehend, betrachte ich die sphärische Trigonometrie als einen wesentlichen Theil der Algebra, die Ergänzung ihrer Rechnungsart aber nach der ersten Ansicht; denn sie ist es, welche uns zur Entdeckung neuer Wahrheiten und Beziehungen der trigonometrischen Linien, als vom weitläuftigsten Gebrauche in dieser Rechnung, leitet. Dasjenige, was schon gegenwärtig mittelst der Rechnung trigonometrischer Größen geleistet wird, sichert uns den größten Nutzen für die Zukunft. Denn, wenn man sowohl in der Euclidischen Geometrie, als in der Geometrie der krummen Linien, jede Art von Größen durch Linien ausdrücken kann, warum sollte es denn nicht möglich seyn, auch dieselben durch Winkel auszudrücken und die vorgelegte Frage in eine trigo-

nometrische zu verwandeln? wir haben hievon bereits Beispiele beim Gebrauche der Trigonometrie zur Auflösung der höhern Gleichungen. Deshalb habe ich nun, um meine Algebra zu ergänzen, einige Sätze, welche auf die Abhängigkeit der Seiten und Winkel Bezug haben, und in den Werken ausgezeichneter Mathematiker ohne Beweis vorkommen, hier sowohl zu beweisen als zu erläutern gesucht. Noch habe ich in §. 13 wichtige trigonometrische Formeln beigebracht, welche zur Transformation der Gleichungen dienen, und die ich in meiner Algebra nicht anführen durfte, obgleich auch diese aus den da aufgestellten Grundsätzen leicht abgeleitet werden können.

Mit den trigonometrischen Gleichungen ist dieselbe Unbequemlichkeit, wie in der Algebra mit den Wurzeln der Gleichungen, verknüpft, indem nämlich hier der Zweifel entsteht, welcher Winkel eigentlich unsrer Frage angehöret. Am öftersten wird dieser Zweifel durch die Hülfswinkel hervorgebracht. Es ist deshalb rathsam für einen und denselben Winkel mehrere Gleichungen zu besitzen, damit der eine Theil den andern zur Hebung der Ungewißheit unterstützen könne. Auch diesem Bedürfniß suchte ich abzuhelfen, besonders bei den Anwendungen der sphärischen Trigonometrie. Die Anwendung wurde bei der Ausmessung der Erde und bei der Anfertigung genauer Karten über einen bedeutenden Landstrich gezeigt; auch wurde dem Ganzen die Auflösung der wichtigsten und der sich oft wiederholenden Aufgabe bei ähnlichen Operationen beigegeben.

Aber die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf astronomische Gegenstände, mit einer gründlichen und

systematischen Darstellung der gebrauchten Gleichungen und Formeln, schien mir nach meiner vieljährigen Erfahrung eine wichtige Sache für junge Astronomen zu seyn; denn alle diese Methoden sind in den mir bekannten astronomischen Werken zerstreut, von verschiedenen Schriftstellern auf die verschiedenste Art oft dunkel, zuweilen aber auch schlecht bewiesen, da dieselben hier im Gegentheil in einer gewissen, und wie es mir scheint, eigenthümlichen Ordnung zusammengestellt erscheinen; alle werden aus streng gewiesenen Principien und Gleichungen, mit eingestreuten Erläuterungen, wie sie der Leser in astronomischen Büchern vergebens suchen wird, abgeleitet.

Die Berechnung der Parallaxe, oder der Aenderung der Lage des Gestirns aus verschiedenen Oertern gesehen, von welcher die Entfernung der Planeten von der Erde und der Sonne abhängt, und also beinahe die Kenntniß der ganzen Sonnenwelt; die Bestimmung der Sonnenfinsternisse, bewirkt durch den Mond der Erde und durch die unteren Planeten; die Bedeckung der Sterne durch die Mondscheibe, das heißt: die wichtigsten Phänomene, welche zur Vervollkommnung der Bewegungstafeln der Himmelskörper und der Geographie dienen; diese Berechnung der Parallaxe, sage ich, hat des großen Einflusses wegen auf das Wachsthum der Astronomie lange die ausgezeichnetsten Astronomen und Geometer beschäftigt, und ihnen verdanken wir hierüber verschiedene Methoden in ziemlich zahlreichen Gleichungen, unter mannigfaltigen Gestalten und nach den verschiedensten Ansichten aufgestellt, welche aber nur zu oft durch langwierige und mühsame Rechnungen erhalten werden.

Diesen so wichtigen Theil der Astronomie gelang es mir unter einen allgemeinen Gesichtspunct zusammen zu bringen, und auf diese Weise alle bis jetzt in der Astronomie unter der mannigfaltigsten Gestalt bekannten Gleichungen auf eine leichte und einfache Weise zu erhalten. An diesem Orte wird der Leser sowohl die Geschichte der Entdeckungen, als auch deren erläuterte Anwendung auf die große Sonnenfinsterniß vom 7. September 1820 finden. Jeder Gleichung beinahe wurden arithmetische Beispiele beigegeben, weil sie unendlich viel zur genauen Auffassung der Sache selbst betragen, das Erkennen der eigenthümlichen Winkel einer Aufgabe und die practische Anwendung der Analysis erleichtern, was nicht immer so leicht ist, wie es scheinen könnte.

Es wäre nun noch zu wünschen, um sowohl das Studium der Astronomie zu erleichtern, als auch schon zur Bequemlichkeit der Astronomen selbst, welche ihre practischen Arbeiten auf Sternwarten zur Vorvollkommnung der Wissenschaft anwenden wollten, daß alles, was hier durch Anwendung der Trigonometrie gezeigt wurde, auf eine ähnliche Art vermittelst der Formeln und Gleichungen der Geometrie der krummen Linien und Mechanik versucht würde, und aus den aufs strengste bewiesenen Gesetzen der Bewegung und Eigenschaften der Curven, in welchen jene Bewegung geschieht; die übrigen Methoden zur Berechnung der Refraction, Aberration, Nutation, Bestimmung der beschriebenen Bahn des Himmelskörpers, endlich alle jene Betrachtungen abgeleitet würden, welche man beim wissenschaftlichen Gebrauche der Beobachtungen nöthig hat: doch ich überlasse glücklichern und ausdauerndern Köpfen diese tiefen Forschun-

gen, welche uns die physische Astronomie zur Berechnung der Tafeln an die Hand giebt *).

Eine solche Sammlung von streng abgeleiteten Gleichungen auf die kleinste Anzahl der untrüglichsten Anschauungen und Grundsätze zurückgebracht, mit vorsichtig gewählten Beispielen erläutert, würde das Auffassen dieser so ausgedehnten Wissenschaft in ihrem ganzen Umfange unendlich erleichtern; würde dem Lernenden die Gewalt der analytischen Sprache, die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander, und den Zusammenhang derselben mit den Werken der Natur am Himmel, im schönsten Lichte zeigen. Endlich würden wir eine Zusammenstellung der wichtigsten Grundsätze als Basis aller Rechnung besitzen. Die wirklich gründliche Wissenschaft der Himmelskörper würde eben zeigen, was sie gegenwärtig auch in der That ist, nämlich: eine Anwendung der Trigonometrie, der Lehre von den krummen Linien und der Mechanik auf die himmlischen Phänomene. Man könnte diese Wissenschaft in die Geschichte dieser Phänomene, oder in die Aufzählung der Ereignisse am Himmel, und in die Berechnung derselben, oder in die Ableitung durch die Macht des Verstandes, eintheilen; denn bereits ist an andern Orten bemerkt, daß Rechnen mit Gewißheit schließen heißt.

Die weitere Verbreitung der Astronomie würde auch wieder — ohne die schon längst bekannten Dienste — nicht

---

*) Anmerk. Der Uebersetzer erlaubt sich hier, den Leser auf die Schriften des Herrn Professors Bessel, und namentlich auf das große Werk: **Fundamenta Astronomiae pro anno 1755 deducta ex observationibus Jam. Bradley**, hinzuweisen. [F]

ohne großen Nutzen für die Menschheit seyn; denn diese hohe Wissenschaft, der wahre Stolz des menschlichen Geistes, stimmt bei der Betrachtung so vieler und herrlicher Wahrheiten den Geist zu etwas Höherem, erregt edlere Gefühle und hält denselben von aller Herabwürdigung fern. Dieß Gefühl der menschlichen Würde tief eingeprägt und verbreitet, würde — so scheint es mir — das beste Mittel zur Heilung der niederen Leidenschaften und so mancher Schwachheiten bei der allgemein sich verbreitenden Civilisation, und deshalb eine kräftige Stütze des moralischen Lebenswandels seyn.

Geschrieben in Wilna, den $\frac{10}{22}$. Januar 1820.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Eigenschaften des sphärischen Dreiecks, Gleichungen und Formeln zur Auflösung desselben.

Seite

§. 1. Die Kenntniß des ebenen Dreiecks und der Kugel, welche zum Begriff der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks führt. 1
Maaß der Winkel im Dreiecke auf der Oberfläche der Kugel, welches auf das Polardreieck und dessen Eigenschaften leitet. 4
§. 2. Fundamentalgleichung der gesammten Trigonometrie. 6
Gleichung zwischen einem Winkel und dreien Seiten . . 7
Gleichung zwischen zwei Winkeln und dreien Seiten. . 9
§. 3. Erste Hauptgleichung. 10
Eigenschaft des gleichschenkligen sphärischen Dreiecks. . 11
§. 4. Zweite Hauptgleichung. 12
Gleichung zwischen einer Seite und drei Winkeln. . . 13
Gleichung zwischen zweien Seiten und drei Winkeln. . 14
§. 5. Dritte Hauptgleichung. 15
Sechs Gleichungen zwischen vier aufeinanderfolgenden Stücken eines Dreiecks, nämlich zwischen zweien Seiten, einem zwischenliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel. 15
§. 6. Gleichungen zwischen den drei Seiten und drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks zugleich. . 16
Cagnoli's drei Gleichungen. 17
Aus denselben leitet der Verfasser die 12 Delambreschen ab; sie geben den einfachsten Ausdruck für die Cagnoli'schen Gleichungen. 20
§. 7. Die Nepper'schen Analogien; neuer und ganz einfacher Beweis derselben. 24
§. 8. Fälle, welche die Nepper'schen Analogien nicht umfassen. 26
Aus den zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zwei Gleichungen zur Aufsuchung der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite, indem man nicht erst die zwei anderen Winkel zu suchen braucht. 26
Aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite zwei Gleichungen zur Aufsuchung des dritten Winkels, indem man nicht erst die zwei übrigen Seiten zu suchen braucht. . 27
Umformung der genannten Gleichungen für die Tangenten, und neuer trigonometrischer Satz. 29
Die trigonometrischen Gleichungen unter den verschiedensten Gestalten sind nur immer analytische Umformungen der Fundamentalgleichung und der drei Hauptgleichungen. 31
§. 9. Anwendung des Vorhergehenden auf die Auflösung der Dreiecke. 32
Das rechtwinklige sphärische Dreieck mit allen zu lösenden Aufgaben. 33

*

Seite
§. 10. Dreiecke, in welchen zwei und drei rechte Winkel vorkommen. 36
§. 11. Das schiefwinklige sphärische Dreieck mit allen möglichen Fällen. 38
Erklärung des Hülfswinkels. 40
Die zweideutigen Fälle bei der Auflösung der Dreiecke, und Mittel, die die Auflösung solcher Fälle erleichtern. . 44
§. 12. Weitere Ausdehnung der Lehre von den sphärischen Dreiecken, nebst Regeln für die Zeichen. . 46
§. 13. Formeln und trigonometrische Gleichungen, die sehr oft in der Analysis gebraucht werden. . . 48
§. 14. Auflösung der trigonometrischen Gleichungen mittelst des unbestimmten Winkels. 52

Zweiter Abschnitt.

Ausmessung des sphärischen Dreiecks; desselben Gebrauch bei der Ausmessung der Erde; Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit dem ebenen.

Seite
§. 15. Der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks. . . 55
Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit der Oberfläche der Kugel, der Streifen des rechten Winkels. 56
Jedes sphärische Dreieck ist einem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke von zwei rechten Winkeln und mit demselben Ueberschusse gleich. 57
Bedeutung und Geschichte dieses wichtigen Satzes. . 60
Was man zu merken hat beim practischen Gebrauche desselben. 61
§. 16. Die trigonometrischen Linien durch die Bogen ausgedrückt, und der doppelte Werth dieser Bogen. 64
Reihen für den Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente durch den Bogen. 64
Der doppelte Gebrauch des Radius der Kugel bei diesen Untersuchungen. 65
§. 17. Der Ueberschuß durch Seiten und Winkel ausgedrückt. 67
Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel. 67
Durch zwei Seiten und durch die zwei denselben anliegenden Winkel. 70
§. 18. Der Bogen durch die trigonometrischen Linien dargestellt. 71
Der Bogen durch den Sinus oder die Tangente ausgedrückt. 72
Den in vier Gliedern gegebenen Werth für die Tangente, in den Werth für den Bogen, durch unendliche Reihen zu verwandeln. 73
Der Gebrauch des Vorstehenden, durch ein Beispiel bei der Ausmessung der Erde und der Verfertigung genauer Karten über einen bedeutenden Landstrich erläutert. 76
§. 19. Auffindung der geogr. Lage verschiedener Puncte auf der Erde, vermittelst trigonometrischer Messungen. 78

Seite

Die Aufgabe auf die gewöhnliche Art gelös't. . . . 78

Die sichere Auflösung dieser Aufgabe durch kleine Bogen. 80

§. 20. Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit dem ebenen. 83

Kurzer analytischer Beweis der sämmtlichen Sätze der ebenen Trigonometrie. 83

Neue Gleichungen in dieser Wissenschaft mit der Hinweisung, daß beide Trigonometrien aus derselben Eigenschaft des ebenen Dreieckes erhalten werden. 84

Der Legendre'sche Satz, der die Auflösung der sphärischen Dreiecke auf die der ebenen, welche letzten zur Auflösung bequemer sind, zurückführt. 87

Drei Gleichungen, in denen bloß die drei Winkel des ebenen Dreiecks vorkommen. 88

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Trigonometrie auf die Aufgaben der sphärischen Astronomie.

Seite

§. 21. Allgemeine Darstellung der astronomischen Rechnungen. 89

I. Lage der Gestirne gegen den Horizont, gegen den Aequator und gegen den Meridian.

Seite

§. 22. Der Stundenwinkel, das Azimuth und der parallactische Winkel. 91

Das Aufsuchen der genannten Winkel wird durch ein Beispiel an der Sonne gezeigt. 92

§. 23. Die Höhe des Gestirns durch den Stundenwinkel und durch die Declination ausgedrückt. . . . 93

Die allgemeine Gleichung für diesen Fall durch ein Beispiel erläutert. 94

§. 24. Der halbe Tagbogen; Auf- und Untergang der Gestirne; das Verweilen derselben über dem Horizont; die allgemeine Gleichung für diesen Fall. 94

Beispiel, die Länge des Tages für Wilna zu bestimmen, nebst der Angabe des längsten und kürzesten Tages im Jahre. 95

Aus den Betrachtungen der Gleichung für den halben Tagbogen werden die Phänomene der täglichen Bewegung für diejenigen Sterne abgeleitet, welche entweder für einen gewissen Punct der Erde nie untergehen oder gar nicht aufgehen. 96

§. 25. Morgen- und Abendweite; die allgemeine Gleichung zur Auffindung derselben nebst einem Beispiele. 98

§. 26. Aenderung des Stundenwinkels und Verbesserung des Mittags. 99

Die allgemeine Gleichung, nach welcher man in der Astronomie Tafeln zur Verbesserung des Mittags aus den correspondirenden Höhen berechnet hat. 100

Ein Beispiel, welches den Gebrauch dieser Gleichung erläutert, und Bestimmung der Mitternacht. 100

II. Lage der Gestirne gegen den Aequator und gegen die Ecliptik.

Seite

§. 27. Aus der Rectascension und Declination eines Gestirns dessen Länge und Breite zu finden. . 102
Allgemeine Gleichungen unter der bequemsten Form für die Rechnung, zur Bestimmung der Länge und Breite eines Gestirns. 103
Das Vorstehende wird durch ein Beispiel an den Sternen Arcturus und Sirius gezeigt. 104

§. 28. Aus der Länge und Breite des Gestirns dessen Rectascension und Declination zu finden. . . 106
Die für diesen Fall allgemeinen Gleichungen werden durch ein Beispiel an denselben Sternen erläutert. . . . 107

§. 29. Jährliche Aenderung in der Lage der Gestirne. 109
Gleichungen für die Berechnung der jährlichen Aenderungen in der Lage der Gestirne. 109
Grund der positiven und negativen Zeichen bei diesen Aenderungen in den Sternverzeichnissen. 110
Beispiele an den Sternen Arcturus und Sirius. 111

§. 30. Der Positionswinkel und dessen Aenderung; die hieher gehörenden Gleichungen. 112

§. 31. Lage des Zeniths gegen den Aequator u. Ecliptik. 114
Die Kenntniß der Sphäre, welche uns zwei alte Benennungen in der Astronomie erklärt, nämlich: die gerade Aufsteigung der Mitte des Himmels, und den Nonagesimus oder den neunzigsten Punct der Ecliptik. 115
Gleichungen für die Länge des Nonagesimus. . . 117
Gleichungen für die Breite des Nonagesimus und für die Weite des aufgehenden Punctes der Ecliptik. . . 118
Gleichungen für den Winkel der Ecliptik mit dem Meridian; für die Länge und Declination des culminirenden Punctes der Ecliptik. 119
Beispiele für das eben Gesagte. 119
Höhe des Punctes der Ecliptik, der durch den Meridian geht. 121

III. Beziehung der Himmelskörper auf den Mittelpunct der Erde oder auf den Mittelpunct der Sonne.

Seite

§. 32. Verwandlung der geocentrischen Oerter in die heliocentrischen. 122
Die Sonne, Planeten und Kometen, von der Oberfläche der Erde aus gesehen, werden auf den Mittelpunct derselben, als den einzigen gemeinschaftlichen Punct der ganzen Oberfläche der Erde, bezogen; die Planeten und Kometen werden aber auch auf den Mittelpunct der Sonne, als den Mittelpunct ihrer Bahn, bezogen. 122
Die rechtläufige und rückläufige Bewegung des Planeten und Kometen kann durch die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik ausgedrückt werden. 124
Die abgekürzte Distanz; der Winkel in der Sonne (Commutatio); der Winkel am Mittelpunct der Erde (Elongatio); und der Winkel im Planeten oder Kometen (Parallaxis annua). 125
Gleichung für die heliocentrische Länge und für die abgekürzte Distanz von der Erde. 126

Seite

Gleichungen für die abgekürzte und wahre Distanz des Planeten und Kometen, sowohl von der Sonne, als auch von der Erde. 126

Gleichung, um die heliocentrische Breite durch die geocentrische auszudrücken. 126

Beispiel. 127

§. 33. Verwandlung der heliocentrischen Oerter in die geocentrischen. 128

Drei Ebenen durch den Mittelpunct der Sonne, und so auch drei Ebenen durch den Mittelpunct der Erde gelegt, die auf denselben genommenen Coordinaten geben uns Gleichungen zwischen der heliocentrischen und geocentrischen Lage des Planeten oder Kometen. 129

Gleichung für die geocentrische Länge. 130

Gleichung für die abgekürzte Distanz von der Erde und für die geocentrische Breite. 131

Das Vorstehende durch ein Beispiel am Planeten Saturn erläutert. 131

IV. Beziehung der Himmelskörper, welche sich nahe an der Erde befinden, auf den Mittelpunct oder auf die Oberfläche der Erde.

Seite

§. 34. Parallaxe der Länge und Breite. 133

Nach der im vorhergehenden §. auseinandergesetzten Methode wird die allgemeine Gleichung zwischen dem Orte des Gestirns aus der Oberfläche der Erde, und dem Orte desselben aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen, aufgestellt. . 135

Aus der so aufgestellten allgemeinen Gleichung werden alle bis jetzt in der Astronomie unter noch so verschiedenen Formen bekannten Gleichungen für die Parallaxe der Länge und Breite abgeleitet. 136

Das Ganze wird durch ein Beispiel an der Sonnenfinsterniß des 7. Septembers 1820 n. S. gezeigt. 140

§. 35. Parallaxe der Rectascension und Declination. 145

Die scheinbare Rectascension und Declination durch die wahre ausgedrückt. 146

Die scheinbare Rectascension und Declination wird durch die wahre Länge und Breite dargestellt. 147

Beispiel an der Sonnenfinsterniß des 7. Sept. 1820. 147

§. 36. Parallaxe des Stundenwinkels und eine neue Methode, Finsternisse zu berechnen. 149

Gleichung für die Aenderung des Stundenwinkels durch die Parallaxe. 149

Gebrauch des genannten Winkels und der Aenderung desselben bei der Berechnung der Finsternisse von Delambre. 150

Beispiel. 151

§. 37. Parallaxe der Höhe. 154

Gleichung für die Horizontalparallaxe u. Höhenparallaxe. 154

Verwandlung der Horizontalparallaxe unterm Aequator in die Horizontalparallaxe irgend eines Ortes, mit Rücksicht auf die wahre Gestalt der Erde. 155

Methode, die Horizontalparallaxe irgend eines Planeten zu bestimmen. 156

Seite

Die scheinbare Distanz vom Zenith wird durch die wahre Distanz und durch die Horizontalparallaxe unterm Aequator ausgedrückt. 157

Die scheinbare Höhe durch die wahre Höhe und durch die Horizontalparallaxe unterm Aequator dargestellt. . . . 158

§. 38. Einfluß der Parallaxe auf die Mondscheibe und Vergrößerung dieser Scheibe. 158

Was die Vergrößerung der Mondscheibe verursacht? . 158

Gleichung für die scheinbare Mondscheibe und für die Vergrößerung derselben. 160

V. Lage der Himmelskörper auf ihrer eigenen Bahn.

Seite

§. 39. Trigonometrische Elemente der Bahn eines Himmelskörpers. 160

Der aufsteigende und niedersteigende Knoten; seine Lage ist zur Kenntniß der Bahn des Planeten oder Kometen nöthig; Eintheilung der Elemente der Bahn; Aufzählung der Elemente sowohl in der Ellipse als auch in der Parabel. . 161

Argument der Breite auf der eigenen Bahn u. Ecliptik. 163

Vier Gleichungen, welche Relationen des Abstandes des Planeten oder Kometen vom Knoten, der heliocentrischen Breite und der Neigung der Bahn ausdrücken. 164

Reduction auf die Ecliptik des Bogens der eigenen Bahn; Gleichungen für diesen Fall, sowohl bei der rechtläufigen als rückläufigen Bewegung. 165

Das Gesagte durch ein Beispiel am Planeten Vesta erläutert. 166

§. 40. Differentialgleichungen der trigonometrischen Elemente der Bahn. 167

Das Differential der Breite, durch das Differential des Arguments der Breite und durch das Differential der Neigung der Bahn ausgedrückt. 168

Das Differential des Abstandes vom Knoten auf der Ecliptik durch das Differential des Arguments der Breite und der Neigung der Bahn. 168

Differentialausdruck für den Abstand des Planeten oder Kometen von der Sonne. 168

Gebrauch des Vorstehenden bei der Vervollkommnung der Bewegungstafeln der Planeten. 169

§. 41. Wie aus zwei oder drei heliocentrischen Längen und Breiten die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn für den Himmelskörper gefunden werden kann. 170

Gleichungen für die heliocentrische Länge des Knotens und die Neigung der Bahn. 170

Aus zwei gegebenen heliocentrischen Längen und Breiten die trigonometrischen Elemente der Bahn zu bestimmen. 171

Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Kometenbahn. 171

Aus den angestellten Beobachtungen auf der Universitäts-Sternwarte in Wilna werden die trigonometrischen Elemente des ausgezeichneten Kometen von 1819 abgeleitet. . 171

Anmerkung des Uebersetzers.

Für diejenigen Leser, welche sich mit den übrigen trefflichen mathematischen Werken des Herrn Verfassers näher bekannt machen wollen, mag hier die Bemerkung stehen: daß in den Formeln, wo trigonometrische Functionen vorkommen,

wst. immer wstawa (sinus) heißt,
dost. — dostawa (cosinus),
sty. — styczna (tangens),
dosty. — dostyczna (cotangens),
sie. — sieczna (secans),
dosie. — dosieczna (cosecans),
wst. odw. — wstawa odwrócona (sinus versus),
dost. odw. — dostawa odwrócona (cosinus versus).

Noch folgen einige astronomische Ausdrücke.

Wznoszenie się proste (Ascensio recta).
Zboczenie (Declinatio).
Wznoszenie się proste środka nieba (Ascensio recta medii coeli).
Poziomotuk (Azimuth).
Luk pótdniowy (Arcus semidiuruus).
Obszerność wschodnia (Amplitudo ortiva).
Obszerność zachodnia (Amplitudo occidua).
Kąt potozenia (Angulus positionis).
Kąt wschodzący (Angulus orientis).
Miéysce środo-ziemskie (Locus geocentricus).
Miéysce środo-stoneczne (Locus heliocentricus).
Bieg kierunkowy (Motus directus).
Bieg wsteczny (Motus retrogradus).
Odległość skrócona (Distantia curtata).
Wezet górny (Nodus ascendens).

Wezet dolny (Nodus descendens).
Pierwiastki biegu (Elementa motus).
Mimośrod (Excentricitas).
Znamienie szerokósci (Argumentum latitudinis).
Przywiedzenie do ekliptyki (Reductio ad eclipticam).
Czas gwiazdowy (Tempus sidereum).
Kąt positkowy (Angulus auxiliaris).
Koto wrębne przesilen (Colurus solstitiorum).
i. t. d.

Druckfehler.

Seite 62. Z. 2 v. u. lies: pag. 172.
„ 101. Z. 10, lies: l. tang. $\beta = 9{,}4144398$.

Die hie und da nicht ganz correct gedruckten Worte, besonders die Verwechselung des durchstrichnen l mit dem t, wird der des Polnischen kundige Leser gütigst verzeihen und selbst verbessern.

Gedruckt in der Richter'schen Buchdruckerei.

Erster Abschnitt.

Eigenschaften des sphärischen Dreiecks: Gleichungen und Formeln zur Auflösung desselben.

Die Kenntniß des ebenen Dreiecks und der Kugel, welche zum Begriff der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks führt.

§. 1.

In einem ebenen Dreiecke, dessen Winkel wir mit A, B, C bezeichnen wollen, die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten aber mit a, b, c, hat man *):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

hieraus

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

also, $\sin A = \sqrt{(1 - \cos^2 A)}$

$$= \frac{\sqrt{(4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2)}}{2bc} = \frac{d}{2bc}$$

*) Euclid's Elemente III. Buch. Satz 13. (Mollweide's Ausgabe.)

Anmerkung. Aus der Gleichung: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ kann bekanntlich nicht nur die Trigonometrie, sondern auch die ganze Geometrie auf eine höchst einfache Weise abgeleitet

wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen d nennt; da nun aber derselbe die Differenz zweier Quadrate ist, so können wir ihn in die zwei Factoren,

$$2bc-(b^2+c^2-a^2)=a^2-(b-c)^2, \text{ und}$$
$$2bc+(b^2+c^2-a^2)=(b+c)^2-a^2 \text{ zerlegen;}$$

jeder dieser Factoren ist abermals die Differenz zweier Quadrate, und so sind die Factoren:

$$a-b+c,\ a+b-c; \text{ und } b+c-a,\ b+c+a;$$

also $d=\sqrt{[(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)]}$.

Das zweite Wurzelzeichen (—) wird beim Dreiecke ausgeschlossen; denn kein Winkel kann in demselben größer als 180° seyn, und folglich kann auch kein negativer Sinus vorkommen. Aus der Geometrie wissen wir, daß $\frac{1}{2}bc \sin A$ den Flächeninhalt des Dreiecks ausdrückt; folglich ist $d=2bc\sin A$ der Flä-

---

werden. Es wird daher gut seyn, den Beweis für diese wichtige Gleichung auch ohne weitere Vorkenntnisse der Geometrie zu führen. Sind (Taf. I. Fig. 5.) A, B, C die Winkel des ebenen Dreiecks; a, b, c aber die, diesen Winkeln in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten: so ist, wenn man aus den Scheiteln A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel fällt, nach der Definition des Cosinus:

$$a=c\cos B+b\cos C$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=b\cos A+a\cos B,$$

oder indem man die Glieder der ersten Gleichung mit a, der zweiten mit b, und der dritten mit c multiplicirt

$$a^2=ac\cos B+ab\cos C$$
$$b^2=cb\cos A+ab\cos C$$
$$c^2=cb\cos A+ac\cos B.$$

Wird jede, von diesen so erhaltenen drei Gleichungen immer von der Summe der beiden übrigen subtrahirt, so erhält man

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Wäre A ein stumpfer Winkel, so würde das Product $-2bc\cos A$ positiv, und müßte in diesem Falle zu b^2+c^2 hinzugesetzt werden. [F]

cheninhalt des Dreiecks viermal genommen: was uns ein Mittel an die Hand giebt, den Flächeninhalt des Dreiecks durch seine drei Seiten auszudrücken.

Die Kugel durch eine Ebene, welche durch ihren Mittelpunct geht, geschnitten, giebt einen größten Kreis, dessen Radius gleich dem Radius der Kugel ist. Der Durchmesser der Kugel senkrecht auf dieses Kreises Ebene genommen, heißt die Axe (Axis), und die auf die Oberfläche der Kugel hervorstehenden Endpuncte dieser Axe werden die Pole (Poli) dieses Kreises genannt. Hieraus schließt man nun, daß der Pol immer 90° von seinem Kreise absteht. Es ist dieß der Mittelpunct (Centrum), aus welchem man mit dem geöffneten Zirkel einen größten Kreis auf der Oberfläche der Kugel verzeichnen kann. Wird dieselbe Kugel durch eine zweite Ebene, welche auch durch ihren Mittelpunct geht, geschnitten; so entsteht ein zweiter größter Kreis, welcher sich mit dem ersten in einer Entfernung von 180° schneiden wird, und beide werden einen Raum auf der Oberfläche der Kugel einschließen. Die Durchschnittspuncte dieser Ebenen bilden auf der Oberfläche der Kugel zwei gleiche, um 180° von einander entfernte Winkel, welche zugleich die Neigungswinkel jener Ebenen gegen einander seyn werden. Hieraus erhellt nun, daß auf der Oberfläche der Kugel nur alsdann von zwei größten Kreisen ein Raum eingeschlossen werden kann, wenn der Bogen eines jeden 180° beträgt. Soll demnach durch kleinere Bogen größter Kreise ein Raum auf der Oberfläche der Kugel eingeschlossen werden; so muß dieselbe vermittelst einer dritten Ebene, welche ebenfalls durch den Mittelpunct der Kugel geht, in Beziehung auf die zwei ersten Ebenen in die Quere geschnitten werden: damit nämlich diese dritte Ebene die Linie schneiden könne, in welcher sich die zwei ersten Ebenen durchschnitten. Alsdann werden die, durch drei Ebenen hervorgebrachten drei Bogen größter Kreise auf der Oberfläche der Kugel einen Raum einschließen.

Man denke sich nun die drei Seiten a, b, c eines ebenen Dreiecks, als Sehnen jener Bogen, also das Dreieck ABC in die Kugeloberfläche eingeschrieben; so werden die Winkel A, B, C, im ebenen Dreiecke gedacht, Sehnenwinkel; auf der Oberfläche der Kugel aber gedacht, Bogenwinkel seyn. Die von den Scheitelpuncten dieser Winkel nach dem Mittelpuncte der Kugel gezogenen geraden Linien sind Radien der Kugel, und werden eine dreieckige Pyramide bilden, deren Spitze im Mittelpuncte der Kugel liegt; und welche das ebene Dreieck abc zur Basis, den eingeschlossenen Theil der Kugeloberfläche aber, zwischen den sich durchschneidenden Ebenen, zum Maaß des körperlichen Winkels hat. Dieser Theil der Kugeloberfläche enthält nun das sphärische Dreieck, dessen Seiten Bogen größter Kreise sind, und die, am Mittelpuncte der Kugel zwischen den Radien derselben eingeschlossenen Winkel messen: die Winkel hingegen des sphärischen Dreiecks werden von den, aus den Winkelpuncten zu den Seiten des Dreiecks gezogenen Berührungslinien gebildet. Da nun aber diese Berührungslinien senkrecht auf dem Radius der Kugel stehen, der Radius aber die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist; so sind die Winkel des sphärischen Dreiecks, da jeder von zwei senkrechten Linien auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Ebenen gebildet wird, Neigungswinkel der die Kugel durchschneidenden Ebenen.

Wenn man von dem Scheitelpuncte eines Bogenwinkels A (Fig. a. Tab. I) jeden seiner Schenkel AB, AC, bis zu 90° verlängert, und aus demselben Scheitelpuncte den Bogen MN zwischen den genannten Schenkeln zieht; so wird der Scheitelpunct A der Pol des zuletzt genannten Bogens MN seyn. Die Radien SM, SN, welche einander im Mittelpuncte der Kugel S begegnen und den Bogen MN einschließen, sind den Berührungslinien, welche den Bogenwinkel A bilden, parallel; weil sie ebenfalls auf die Durchschnittslinie AS der beiden Ebenen senkrecht sind: und folglich ist der Winkel zwischen diesen Ra-

dien gleich dem Winkel zwischen den Berührungslinien, oder dem Bogenwinkel A. Es wird demnach in einem sphärischen Dreiecke jeder Winkel dem zwischen seinen Schenkeln eingeschlossenen Bogen eines größten Kreises, welcher vom Scheitelpuncte oder Pole 90° absteht, gleich seyn. Es hat also jeder Winkel im sphärischen Dreiecke einen gleich großen Bogen auf der Oberfläche der Kugel. Um die genannten Bogen und Winkel noch näher kennen zu lernen, denke man sich (Fig. 2. Tab. I) das sphärische Dreieck ABC, und verlängere die Seiten desselben bis 90°; aus dem Scheitelpuncte eines jeden Winkels in der Entfernung von 90° ziehe man Bogen, und verlängere dieselben bis zur gegenseitigen Durchschneidung; so entsteht ein zweites sphärisches Dreieck A'B'C', welches das Polardreieck von ABC genannt wird. In diesem neuen Dreiecke ist der

Bogen DE $=\angle$ A

Bogen ML $=\angle$ B

Bogen NO $=\angle$ C.

Weil nun der Punct A' sich sowohl auf dem Bogen C'A', aus B gezeichnet, als auf dem Bogen B'A', aus C gezeichnet, befindet; so ist A' der Pol der Seite BC. Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß B' der Pol der Seite AC; C' der Pol der Seite AB: und also das Dreieck ABC das Polardreieck von A'B'C' ist.

Aus den angestellten Betrachtungen über den Abstand des Pols, von seinem Bogen, folgt: daß C'L $=$ 90°; A'M $=$ 90°; und folglich ML oder der Winkel B die Ergänzung des Bogens A'C' zu 180° ist. Auf dieselbe Art beweist man nun auch, daß der Bogen DE oder der Winkel A die Ergänzung des Bogens B'C' zu 180°; und der Bogen NO oder der Winkel C die Ergänzung des Bogens A'B' zu 180° ist. Bezeichnet man also die Winkel des sphärischen Dreiecks mit den großen Buchstaben eines Alphabets, die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten aber mit den kleineren Buch-

staben desselben Alphabets; so hat man sofort folgende Glei-
chungen:

$$A+a'=180^\circ;\ B+b'=180^\circ;\ C+c'=180^\circ.$$

Aus demselben Princip folgt: daß $BM=90^\circ$; $CN=90^\circ$, und also BC die Ergänzung des Bogens NM oder des Winkels A' zu 180° ist: auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AC die Ergänzung des Winkels B' zu 180°, und AB die Ergänzung des Winkels C' zu 180° ist: was man auch so ausdrükken kann:

$$A'+a=180^\circ;\ B'+b=180^\circ;\ C'+c=180^\circ.$$

Es ist demnach in zwei sphärischen Dreiecken, wo das eine das Polardreieck des andern ist, jeder Winkel in irgend einem dieser Dreiecke die Ergänzung zu 180° der gegenüberstehenden Seite im andern Dreiecke.

Das Polardreieck, welches aus der Eigenschaft der Kugel folgt, wurde zuerst von Caswell erkannt und beschrieben *). Mit Recht wird es von Euler als Grundwahrheit, und nicht als eine erst durch Rechnung hervorgegangene Wahrheit betrachtet.

Fundamentalgleichung der gesammten Trigonometrie.

§. 2.

Betrachten wir das sphärische Dreieck ABC Fig. 1., so wissen wir bereits, daß es aus drei Winkeln und drei Bogen größter Kreise zusammengesetzt sey. Jeder Winkel, den die sich durchschneidenden Bogen bilden, soll durch einen großen Buchstaben des Alphabets ausgedrückt werden: mit demselben kleineren Buchstaben aber wollen wir die diesem Winkel gegenüberstehende Seite bezeichnen: und so z. B. bezeichnet A den Winkel, a aber die diesem Winkel gegenüberliegende Seite. Durch

---

*) Caswell in Wallis Werken. Tom. II. pag. 896.

diese Bezeichnung werden wir in den Stand gesetzt, Gleichungen ohne Figur zu lesen. Man könnte auch bei allen unsern Untersuchungen hier das Zeichnen der Figuren leicht entbehren. Aus dem Scheitelpuncte des Winkels A ziehe man die Berührungslinie AK zum Bogen c; und die Berührungslinie AL zum Bogen b. Durch die Endpuncte B, C dieser Bogen führe man aus dem Mittelpuncte der Kugel O gerade Linien, und verlängere dieselben bis zur Durchschneidung mit den Berührungslinien, nämlich die Linie OK, welche die Secante des Bogens c, und die Linie OL, welche die Secante des Bogens b ist; der Winkel KOL am Mittelpuncte der Kugel wird durch den Bogen a gemessen.

Verbindet man die Puncte K, L, durch eine gerade Linie KL, die, wie wir sehen, beiden geradlinigen Dreiecken KAL und KOL gemeinschaftlich seyn wird; so ist

$$KL^2 = KA^2 + AL^2 - 2KA.\ AL.\cos A.$$
$$= KO^2 + LO^2 - 2KO.\ LO.\cos a.$$

und werden diese Linien in ihre trigonometrische Bedeutung übersetzt, so erhält man

$$\tang^2 c + \tang^2 b - 2\tang c.\ \tang b.\ \cos A$$
$$=$$
$$\sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c.\ \sec b.\ \cos a.$$

Nun ist aber, wenn wir den Radius der Kugel zur Einheit annehmen, $\sec^2 c - \tang^2 c = 1$, $\sec^2 b - \tang^2 b = 1$; und nach der Erklärung der Tangente und Secante,

$$\tang c = \frac{\sin c}{\cos c},\ \tang b = \frac{\sin b}{\cos b};\ \sec c = \frac{1}{\cos c},\ \sec b = \frac{1}{\cos b};$$

führen wir diese Werthe in die letzte Gleichung ein, dividiren dieselbe durch 2, und schaffen die Brüche weg: so ist sofort

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\ \cos c}{\sin b.\ \sin c.}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a.\ \cos c}{\sin a.\ \sin c} \quad [1]$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a . \cos b}{\sin a . \sin b.}$$

Die Gleichungen für cos B und cos C werden erhalten, wenn dieselben Betrachtungen, die wir bei dem Winkel A angestellt haben, auch in Beziehung auf die Winkel B und C wiederholt werden. Jede von den vorstehenden Gleichungen wird die Fundamentalgleichung genannt; weil nämlich De la Grange aus derselben die gesammte Trigonometrie ableitet. Auch wir wollen hier das Nämliche — und wie es uns scheint auf eine noch einfachere Art — versuchen; indem wir noch andere wichtige Gleichungen, die dieser große Geometer nicht einmal erwähnt, hinzufügen. Ehe wir jedoch weiter gehen, wird es gut seyn, den Gleichungen [1] eine andere bequemere Gestalt für die Rechnung zu geben.

Es ist bekannt, daß $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, also

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b . \sin c + \cos b . \cos c - \cos a}{\sin b . \sin c}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b . \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a + b - c) . \sin \frac{1}{2} (a + c - b)}{\sin b . \sin c} \; {}^{*)}$$

die erste Seite der letzten Gleichung ist durchaus positiv; also muß es nothwendigerweise auch die zweite seyn: woraus $a + b > c$, $a + c > b$ folgt; denn wäre es möglich, daß $a + b < c$, $a + c < b$ seyn könnte; so müßte auch $a < c - b$, $a < b - c$, und folglich

---

*) Anmerkung. Sind α und β zwei Winkel, so ist die Differenz der Cosinus dieser Winkel, nämlich:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) . \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta)$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) . \sin \tfrac{1}{2} (\beta - \alpha).$$

Wenden wir das Nämliche bei $\cos (b - c) - \cos a$ an, indem man $\alpha = b - c$, $\beta = a$ setzt, so erhält man

$$\cos (b - c) - \cos a = -2 \sin \tfrac{1}{2} (b - c + a) . \sin \tfrac{1}{2} (b - c - a)$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (a + b - c) . \sin \tfrac{1}{2} (a + c - b).$$

[F]

auch $2a < o$ seyn, was aber ein Widerspruch wäre. Es ist demnach in jedem sphärischen Dreiecke die Summe zweier Seiten größer, als die dritte. Ist aber $a + b > c$, so muß auch $a > c - b$ seyn, d. h. im sphärischen Dreiecke ist jede Seite größer, als die Differenz der beiden anderen Seiten.

Noch wissen wir, daß $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A$, wird die erste Gleichung [1] zur Einheit addirt, so ist

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin b.\ \sin c - \cos b.\ \cos c + \cos a}{\sin b.\ \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b.\ \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c).\ \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b.\ \sin c.}$$

und indem man den Sinus durch den Cosinus dividirt

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c).\ \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c).\ \sin \frac{1}{2}(b + c - a)} \quad [1']$$

wird eben so mit den zwei andern Gleichungen für den $\cos B$ und $\cos C$ verfahren, so erhält man

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c - a).\ \sin \frac{1}{2}(b + a - c)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c).\ \sin \frac{1}{2}(a + c - b)} \quad [1'']$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + c - b).\ \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c).\ \sin \frac{1}{2}(a + b - c)} \quad [1''']$$

Werden nun die drei Gleichungen [1'] [1''] [1'''] durch einander dividirt, so gelangen wir zu den drei folgenden:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}A}{\tan \frac{1}{2}B} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin \frac{1}{2}(b + c - a)} \quad [1_{,}]$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}A}{\tan \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c - a)} \quad [1_{,,}]$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}B}{\tan \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin \frac{1}{2}(a + c - b)} \quad [1_{,,,}]$$

diese drei letzten, oft sehr nützlichen und bei analytischen Rechnungen gebräuchlichen Gleichungen werden sich auch in der Trigonometrie als sehr brauchbar zeigen.

Erste Hauptgleichung.

§. 3.

Aus den Gleichungen [1] erhielten wir den Sinus, Cosinus und endlich die Tangente der Hälfte eines jeden Winkels: nun wollen wir zu dem Sinus des ganzen Winkels übergehen. Weil $\sin A = \sqrt{(1 - \cos^2 A)}$, so erhalten wir aus den Gleichungen [1] folgende:

$$\sin A = \frac{\sqrt{[\sin^2 b.\ \sin^2 c - (\cos a - \cos b.\ \cos c)^2]}}{\sin b.\ \sin c}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{[\sin^2 a.\ \sin^2 c - (\cos b - \cos a.\ \cos c)^2]}}{\sin a.\ \sin c}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{[\sin^2 a.\ \sin^2 b - (\cos c - \cos a.\ \cos b)^2]}}{\sin a.\ \sin b}$$

das zweite Zeichen (—) vor dem Wurzelzeichen wird hier als nicht zum Dreiecke gehörend, derselben Ursache wegen, die wir in §. 1. für das ebene Dreieck anführten, aus der Acht gelassen. Es sey Kürze halber

$$f = \sqrt{[\sin^2 b.\ \sin^2 c - (\cos a - \cos b.\ \cos c)^2]};$$

obgleich nun f, indem es den Zähler des Bruches anzeigt, für jeden Winkel A, B, C einen andern Werth zu haben scheint: so ist dennoch, wenn wir die Sinus durch die Cosinus ausdrücken, d. h. $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$; $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$, $\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$ setzen, nach vollzogener Multiplication, und nach geschehener Entwickelung des Quadrats im zweiten Gliede, der Werth für f in allen drei Gleichungen, d. h. für alle drei Winkel A, B, C, der nämliche; und zwar wie folgt:

$$f = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a.\ \cos b.\ \cos c)}$$

in der Geometrie wird bewiesen, daß der Werth von f das Verhältniß des schiefwinkligen Parallelepipeds zum rechtwinkligen ausdrückt: wenn nämlich die Winkel zwischen den Kanten,

die den körperlichen Winkel einschließen, d. h. a, b, c, entweder schiefe oder rechte Winkel sind *). Wir haben demnach

$$\sin A = \frac{f}{\sin b.\ \sin c}$$

$$\sin B = \frac{f}{\sin c.\ \sin a}$$

$$\sin C = \frac{f}{\sin a.\ \sin b},$$

und durch die Elimination von f

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad [2]$$

das heißt: in jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Winkel, wie die Sinus der diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten. Die Gleichung [2] ist die erste Hauptgleichung, welche das sphärische Dreieck von dem ebenen unterscheidet.

Ist $\sin a = \sin b$; so folgt aus [2] $\sin A = \sin B$, und umgekehrt: es sind demnach im gleichschenkligen Dreiecke die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich: und eben so, wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Aus den Gleichungen [2] erhält man:

$$\sin A.\ \sin b = \sin a.\ \sin B,$$

$$\sin A.\ \sin c = \sin a.\ \sin C;$$

diese Gleichungen zu einander addirt, und von einander abgezogen, geben:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A\,(\sin b + \sin c) = \sin a\,(\sin B + \sin C)\\ \sin A\,(\sin b - \sin c) = \sin a\,(\sin B - \sin C)\end{array}\right\} [\alpha]$$

wird in diesen Gleichungen $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2}A.\ \cos \frac{1}{2}A$, $\sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a.\ \cos \frac{1}{2}a$ gesetzt; und werden die Summen und Diffe-

*) Legendre Geométrie Note V. pag. 297.

renzen der Sinus durch die Producte aus den Sinus und Cosinus der halben Summen und halben Differenzen ausgedrückt; so erhält man leicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B+C)} \\ \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}=\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B+C)} \end{array}\right\}[\alpha,]$$

sollte denn nicht jede der vorstehenden Gleichungen [α,] aus zwei einfachen zusammengesetzt seyn? Mehreres hierüber erfahren wir weiter unten.

Zweite Hauptgleichung.

§. 4.

Wenn man ein sphärisches Dreieck hat, dessen Winkel A, B, C, und die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten a, b, c sind; und man denkt sich noch ein zweites Dreieck mit den Winkeln A′, B′, C′, und den gegenüberstehenden Seiten a′, b′, c′, aber so, daß das eine des andern Polardreieck sey: so wird man, vermöge der in §. 1. angestellten Betrachtung, folgende Gleichungen haben:

$$A=180^\circ-a',\ B=180^\circ-b',\ C=180^\circ-c',$$
$$A'=180^\circ-a,\ B'=180^\circ-b,\ C'=180^\circ-c,$$

folglich

$$A+B+C+a'+b'+c'=3.\ 180^\circ,$$
$$A'+B'+C'+a+b+c=3.\ 180^\circ;$$

und wenn $A=180^\circ-a'$, so ist $\sin A=\sin a'$, $\cos A=-\cos a'$: auf ähnliche Art ist $\sin B=\sin b'$, $\cos B=-\cos b'$; $\sin C=\sin c'$, $\cos C=-\cos c'$; $\sin A'=\sin a$, $\cos A'=-\cos a$; $\sin B'=\sin b$, $\cos B'=-\cos b$; $\sin C'=\sin c$, $\cos C'=-\cos c$.

Führen wir diese Werthe in die Gleichung [1] §. 1. ein; so ist

$$\cos a'=\frac{\cos A'+\cos B'.\ \cos C'}{\sin B'.\ \sin C'}$$

und folglich auch

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B.\ \cos C}{\sin B.\ \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A.\ \cos C}{\sin A.\ \sin C} \quad [3]$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos B.\ \cos A}{\sin B.\ \sin A}$$

So wie nun in den Gleichungen [1] jeder Winkel durch drei Seiten ausgedrückt wird; so wird hier in den Gleichungen [3] jede Seite durch drei Winkel angegeben. Jede der vorstehenden Gleichungen [3] zeigt immer eine und dieselbe Verbindung, nur in Beziehung auf eine andere Seite. Diese Gleichung wollen wir die zweite Hauptgleichung nennen. Es mag nun noch die bequemere Einrichtung dieser Gleichungen zum logarithmischen Gebrauche folgen. Da $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$: so giebt die erste Gleichung [3] von der Einheit subtrahirt

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin B.\ \sin C - \cos B.\ \cos C - \cos A}{\sin B.\ \sin C}$$

$$= - \frac{\cos (B + C) + \cos A}{\sin B.\ \sin C}$$

$$= - \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A + B + C).\ \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B.\ \sin C}$$

Die erste Seite dieser Gleichung ist durchaus positiv; es mus also auf der andern Seite einer der Cosinus negativ seyn, und deshalb sein Winkel ein stumpfer. Woraus denn folgt, daß $(A + B + C) > 180°$: es ist demnach in einem sphärischen Dreiecke die Summe aller drei Winkel größer, als zwei Rechte. ✗

Nun wissen wir aber bereits aus dem Vorhergehenden, daß $A + B + C + a' + b' + c' = 3.\ 180° = 6.\ 90°$ ist; es muß also, wenn $(A + B + C) > 2.\ 90°$, $(a' + b' + c') < 4.\ 90°$ seyn, das heißt: in jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe der drei Seiten kleiner, als vier rechte Winkel.

Weil $A + B + C + a' + b' + c' = 6 \cdot 90 = 3\pi$,
so ist $A + B + C < 6 \cdot 90 < 3\pi$.

Aus dem vorletzten Satze schließt man noch Folgendes: da die Nebenwinkel, wenn man irgend eine Seite des sphärischen Dreiecks verlängert, zwei Rechten gleich sind, so ist im sphärischen Dreiecke der äußere Winkel kleiner, als die Summe der zwei innern Winkel.

Wird jede von den Gleichungen [3] zur Einheit addirt, $1+\cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2}a$, so folgt:

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin B.\ \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{\sin B.\ \sin C}$$

$$= \frac{\cos (B - C) + \cos A}{\sin B.\ \sin C}$$

$$= \frac{2\cos \frac{1}{2}(A+B-C).\ \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B.\ \sin C}$$

dividirt man den Sinus durch den Cosinus: so erhält man

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B+C).\ \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C).\ \cos \frac{1}{2}(A+C-B)} \quad [3']$$

Verfährt man auf eine ähnliche Art mit den zwei übrigen Gleichungen [3] für $\cos b$ und $\cos c$, so ist

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B+C).\ \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C).\ \cos \frac{1}{2}(B+C-A)} \quad [3'']$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B+C).\ \cos \frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos \frac{1}{2}(A+C-B).\ \cos \frac{1}{2}(B+C-A)} \quad [3''']$$

und nun auch die so erhaltenen Gleichungen [3'] [3''] [3'''] durch einander dividirt, geben

$$\frac{\tang \frac{1}{2}a}{\tang \frac{1}{2}b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+C-B)} \quad [3_{,}]$$

$$\frac{\tang \frac{1}{2}a}{\tang \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C)} \quad [3_{,,}]$$

$$\frac{\tang \frac{1}{2}b}{\tang \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C)} \quad [3_{,,,}]$$

Die vorstehenden Gleichungen drücken eben so das Verhältniß der Seiten durch die Winkel aus, als jene $[1_{,}]$ $[1_{,,}]$ $[1_{,,,}]$ in §. 2. das Verhältniß der Winkel durch die Seiten:

und sowohl das eine, als das andere System dieser Gleichungen kann von ausgedehntem Nutzen bei analytischen Rechnungen seyn.

Dritte Hauptgleichung.

§. 5.

Aus der Fundamentalgleichung [1] §. 2. erhält man auch:

$$\cos a = \cos b.\ \cos c + \sin b.\ \sin c.\ \cos A,$$
$$\cos b = \cos a.\ \cos c + \sin a.\ \sin c.\ \cos B,$$
$$\cos c = \cos a.\ \cos b + \sin a.\ \sin b.\ \cos C,$$

wenn wir statt des Cosinus von b in der ersten Gleichung den Werth desselben aus der zweiten Gleichung setzen: so ist

$$\cos a = \cos a.\ \cos^2 c + \sin a.\ \sin c.\ \cos c.\ \cos B$$
$$+ \sin b.\ \sin c.\ \cos A:$$

und indem das erste Glied der zweiten Seite dieser Gleichung auf die erste Seite gebracht wird: für $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$, im letzten Gliede aber $\sin b = \frac{\sin a.\ \sin B}{\sin A}$ setzt, und die ganze Gleichung durch $\sin c.\ \sin a$ dividirt, so erhält man:

$$\operatorname{cotg} a.\ \sin c = \cos c.\ \cos B + \sin B.\ \operatorname{cotg} A \quad [4]$$

Wenn in dieselbe erste Gleichung der Werth für den $\cos c$ aus der dritten Gleichung eingeführt wird, $1 - \cos^2 b$ in $\sin^2 b$ verwandelt, und $\sin c = \frac{\sin a.\ \sin C}{\sin A}$ setzt, dann die ganze Gleichung durch $\sin a.\ \sin b$ dividirt; so ist

$$\operatorname{cotg} a.\ \sin b = \cos b.\ \cos C + \sin C.\ \operatorname{cotg} A \quad [4']$$

Verfährt man auf ähnliche Art mit den Gleichungen für $\cos b$, $\cos c$, so giebt jede derselben zwei Gleichungen, folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{cotg} b.\ \sin c = \cos c.\ \cos A + \sin A.\ \operatorname{cotg} B,\\
&\operatorname{cotg} b.\ \sin a = \cos a.\ \cos C + \sin C.\ \operatorname{cotg} B,\\
&\operatorname{cotg} c.\ \sin a = \cos a.\ \cos B + \sin B.\ \operatorname{cotg} C,\\
&\operatorname{cotg} c.\ \sin b = \cos b.\ \cos A + \sin A.\ \operatorname{cotg} C.
\end{aligned}\right\} [4'']$$

Diese Gleichungen hängen von zwei Winkeln und zwei Seiten ab, von welchen die eine Seite einem der Winkel anliegt, die andere aber demselben Winkel gegenübersteht: da nun aber jeder Winkel zwei anliegende Seiten hat, so erhält man aus jeder Gleichung [1] zwei neue Gleichungen. Alle diese Gleichungen [4] sind leicht zu behalten: alle zeigen dieselbe Verbindung, nur auf verschiedene Seiten und Winkel bezogen, und diese Verbindung macht die dritte Hauptgleichung aus. Alle möglichen Combinationen, welche zwischen zwei Winkeln und zwei Seiten, einer anliegenden und einer gegenüberstehenden, Statt finden können, sind in den sechs Gleichungen [4] enthalten. Die Fundamentalgleichung [1], und die aus derselben hergeleiteten drei Hauptgleichungen [2], [3], [4], sind hinreichend zur Auflösung aller möglichen Fälle beim sphärischen Dreiecke, wie wir weiter unten sehen werden. Man könnte nun mit der Anwendung des Gesagten die sphärische Trigonometrie, wie es auch wirklich von Lagrange geschehen ist, beschließen, wenn man zuvor noch jeder Gleichung [4] eine bequemere Gestalt zur Berechnung mit Logarithmen gegeben hätte. Aber hier ist folgende Ueberlegung sehr wichtig: die Fundamentalgleichung [1] lieferte uns drei Hauptgleichungen; sollte die Combination dieser vier Gleichungen mit einander uns nicht etwa zu neuen Wahrheiten, oder zu Methoden, die die Auflösung des sphärischen Dreiecks noch mehr erleichterten, führen? — Wir wollen diese Frage überlegen.

Gleichungen zwischen den drei Seiten und drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks zugleich.

§. 6.

Nachdem wir uns nun mit der Fundamentalgleichung, und mit den Hauptgleichungen der Trigonometrie bekannt gemacht haben, wollen wir dieselben mit einander combiniren, das

heißt: eine mit der andern, indem wir die verschiedenen Werthe der Seiten und Winkel setzen, verbinden. Die erste Gleichung [3] giebt

$$\cos A = \cos a.\ \sin B.\ \sin C - \cos B.\ \cos C$$

$$\cos a.\ \cos A = \cos^2 a.\ \sin B.\ \sin C - \cos a.\ \cos B.\ \cos C.$$

Da nun aus den Gleichungen [1]

$$\cos a = \cos A.\ \sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c,$$

so ist, wenn wir diesen Werth von $\cos a$ auf der ersten Seite der vorhergehenden Gleichung anwenden,

$$\cos^2 A.\ \sin b.\ \sin c + \cos A.\ \cos b.\ \cos c$$
$$= \cos^2 a.\ \sin B.\ \sin C - \cos a.\ \cos B.\ \cos C;$$

verwandelt man die Cosinus in die Sinus: $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, so erhält man

$$\sin b.\ \sin c - \sin^2 A.\ \sin b.\ \sin c + \cos A.\ \cos b.\ \cos c$$
$$= \sin B.\ \sin C - \sin^2 a.\ \sin B.\ \sin C - \cos a.\ \cos B.\ \cos C$$

im zweiten Gliede, auf der zweiten Seite dieser Gleichung, setze man aus [2] $\sin B = \frac{\sin A.\ \sin b}{\sin a.}$, $\sin C = \frac{\sin A.\ \sin c}{\sin a}$, und lasse die sich aufhebenden Glieder weg, so ist sofort

$$\sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c.\ \cos A$$
$$= \sin B.\ \sin C - \cos B.\ \cos C.\ \cos a \quad [\beta_1]$$

verfährt man auf ähnliche Art mit den Gleichungen für den $\cos B$ und $\cos C$ in [3], so ergeben sich folgende zwei

$$\sin a.\ \sin b + \cos a.\ \cos b.\ \cos C$$
$$= \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B.\ \cos c \quad [\beta_2],$$

$$\sin a.\ \sin c + \cos a.\ \cos c.\ \cos B$$
$$= \sin A.\ \sin C - \cos A.\ \cos C.\ \cos b \quad [\beta_3];$$

von den Gleichungen $[\beta_1]$ $[\beta_2]$ $[\beta_3]$ enthält jede alle drei Seiten und alle drei Winkel des Dreiecks. Cagnoli hat diese Gleichungen zuerst in seiner Trigonometrie aufgestellt *). Aber

*) Anmerkung. Trigonométrie rectiligne et sphérique, par Antoine Cagnoli, traduite de l'Italien par N. M. Chompré.

auch die Gleichung [α] in §. 3., die wir auf eine so leichte Weise erhielten, zeigt uns das Nämliche. Selbst jede von den Gleichungen [4] kann zu einer solchen führen, welche alle Stükke des Dreiecks in sich schließt; wenn nämlich in der Gleichung [4'] entweder für sin b oder sin c der jedesmalige Werth aus [2] gesetzt wird. Ähnliche Combinationen zwischen sämmtlichen Stücken eines Dreiecks hielt man für einen Zeitvertreib der Analysten, bis sich endlich der Nutzen davon bei schwierigeren astronomischen Fragen zeigte.

Erstens: Die Gleichungen [$\alpha_{,}$] in §. 3. scheinen aus zwei einfachen Gleichungen zusammengesetzt zu seyn, die wir jedoch nicht auffinden konnten. Jede der Cagnolischen Gleichungen sollte uns zu demselben, oder wenigstens zu einem ähnlichen Resultate führen. Wir wollen das eben Gesagte an [$\beta_{,}$] versuchen. Es ist bekanntlich:

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}A - 1,$$
$$\cos a = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}a - 1;$$
$$\sin B.\ \sin C + \cos B.\ \cos C = \cos(B - C):$$

und also

$$\cos B.\ \cos C = \cos(B - C) - \sin B.\ \sin C$$
$$\cos B.\ \cos C - \sin B.\ \sin C = \cos(B + C).$$

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die erste von den Gleichungen [3], so ist

$$1 - \cos a = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 2(1 - \cos^2 \tfrac{1}{2}a)$$
$$= \frac{\sin B.\ \sin C - \cos A - \cos B.\ \cos C}{\sin B.\ \sin C};$$

woraus denn folgt:

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}a.\ \sin B.\ \sin C = -\cos(B + C) - \cos A,$$
$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}a.\ \sin B.\ \sin C = \cos(B - C) + \cos A.$$

Paris 1808. pag. 326. Nr. 1139; und die Anwendung dieser Gleichungen bei der Aberration Nr. 1535. [F]

Wird mit der ersten von den Gleichungen [1] in §. 2. auf ähnliche Art verfahren, so erhält man

$$1-\cos A=2\sin^2\tfrac{1}{2}A=2(1-\cos^2\tfrac{1}{2}A)$$

$$=\frac{\sin b.\ \sin c-\cos a+\cos b.\ \cos c}{\sin b.\ \sin c};$$

und hieraus folgt wiederum

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c=\cos(b-c)-\cos a,$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c=-\cos(b+c)+\cos a.$$

Vermittelst der hier angedeuteten Werthe wollen wir nun versuchen, irgend eine der Cagnolischen Gleichungen, z. B. [β_1], auf den einfachsten Ausdruck, indem wir aber in derselben alle drei Seiten und Winkel beibehalten, zurück zu bringen:

$$\sin b.\sin c+\cos b.\cos c.\cos A=\sin B.\sin C-\cos B.\cos C.\cos a\ [\beta_1]$$

setzen wir hier in [β_1] statt $\cos A$ seinen Werth $2\cos^2\frac{1}{2}A-1$; statt $\cos a$ seinen Werth $=1-2\sin^2\frac{1}{2}a$, so erhalten wir

$$-\cos(b+c)+2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos b.\ \cos c=$$

$$=-\cos(B+C)+2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos B.\ \cos C\ [\beta_1']:$$

nun wissen wir aber, daß

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos b.\ \cos c=$$

$$=2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b-c)-2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c$$

$$=2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b-c)+\cos(b+c)-\cos a;$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos B.\ \cos C=$$

$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B-C)-2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \sin B.\ \sin C$$

$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B-C)+\cos(B+C)+\cos A;$$

man erhält also, wenn die letzten Werthe in [β_1'] gesetzt werden, nach Weglassung der sich aufhebenden Glieder, folgende Gleichung:

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b-c)-\cos A=$$

$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B-C)+\cos a.$$

Wird in dieser Gleichung für $-\cos A$, $1-2\cos^2\frac{1}{2}A$, und $\cos a=1-2\sin^2\frac{1}{2}a$ gesetzt; so ist

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A[\cos(b-c)-1]=2\sin^2\tfrac{1}{2}a[\cos(B-C)-1]:$$

da $\cos(b-c)=1-2\sin^2\frac{1}{2}(b-c)$, und $\cos(B-C)=1-2\sin^2\frac{1}{2}(B-C)$ ist; so erhält man, nach Einführung dieser Werthe in die letzte Gleichung, Veränderung der Zeichen, und Ausziehung der Wurzel, folgende Gleichung:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}\ \text{I.}$$

Zweitens: In derselben Gleichung $[\beta_1]$ setze man $\cos A=1-2\sin^2\frac{1}{2}A$, $\cos a=1-2\sin^2\frac{1}{2}a$, und man erhält

$$\cos(b-c)-2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos b.\ \cos c=$$
$$=-\cos(B+C)+2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos B.\ \cos C:$$

nun ist aber nach dem bereits früher Erwähnten

$$\cos(b-c)=2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c+\cos a,$$
$$-\cos(B+C)=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \sin B.\ \sin C+\cos A;$$

führt man demnach diese Werthe in die nächst vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$-2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b+c)-\cos A=$$
$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B-C)-\cos a;$$

für $-\cos A$ den Werth $-1+2\sin^2\frac{1}{2}A$, und für $-\cos a$, $-1+2\sin^2\frac{1}{2}a$ gesetzt, giebt

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A[1-\cos(b+c)]=\sin^2\tfrac{1}{2}a[\cos(B-C)+1]:$$

da nun aber $1-\cos(b+c)=2\sin^2\frac{1}{2}(b+c)$,
$1+\cos(B-C)=2\cos^2\frac{1}{2}(B-C)$;

so folgt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}\ \text{II.}$$

Drittens: Werden in die Gleichung $[\beta_1]$ für $\cos A$, $\cos a$, folgende Werthe gesetzt:

$$\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A-1;\ \cos a=2\cos^2\tfrac{1}{2}a-1;$$

so verwandelt sich dieselbe in die nachstehende

$$-\cos(b+c)+2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos b.\ \cos c=$$
$$=\cos(B-C)-2\cos^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos B.\ \cos C;$$

und da

$$-\cos(b+c)=2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c-\cos a,$$
$$\cos(B-C)=2\cos^2\tfrac{1}{2}a.\ \sin B.\ \sin C-\cos A;$$

so ist $$2\cos^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b-c)+\cos A=$$
$$=-2\cos^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B+C)+\cos a:$$
$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A\,[1+\cos(b-c)]=2\cos^2\tfrac{1}{2}a\,[1-\cos(B+C)];$$
und hieraus
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A}\quad\text{III.}$$

Viertens: In der Gleichung $[\beta_1]$ wollen wir endlich dem $\cos A$ und $\cos a$ noch folgende Werthe beilegen:
$$\cos A=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}A,\quad \cos a=2\cos^2\tfrac{1}{2}a-1:$$
für $\sin b.\sin c+\cos b.\cos c$ setze man $2\sin^2\frac{1}{2}A.\ \sin b.\sin c+\cos a$; dann $\sin b.\ \sin c-\cos b.\ \cos c=-\cos(b+c)$: wird dieselbe Veränderung auf der andern Seite der Gleichung mit der Function der Winkel B und C getroffen; so erhält man
$$-2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \cos(b+c)+\cos A=$$
$$=-2\cos^2\tfrac{1}{2}a.\ \cos(B+C)-\cos a;$$
und werden hier statt $\cos A$, $\cos a$, die nämlichen, schon oben gebrauchten Werthe gesetzt, so bekommt die Gleichung folgende Gestalt:
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A\,[1+\cos(b+c)]=\cos^2\tfrac{1}{2}a\,[1+\cos(B+C)],$$
und folglich
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}\quad\text{IV.}$$

Die große Einfachheit der Gleichungen I, II, III, IV, von denen jede eine Verbindung zwischen allen Seiten und allen Winkeln des sphärischen Dreiecks ausdrückt, ist einleuchtend. Delambre hat dieselben zuerst 1807, jedoch ohne allen Beweis, bekannt gemacht *). Dann hat Herr Professor Gauß diese Gleichungen in seinem Werke „Theoria Motus Corporum Coelestium," aber auch ohne Beweis, aufgestellt, und dieselben, als bis auf diese Zeit in der Geometrie unbe-

*) Delambre Connoissance des tems 1809. p. 45. Das Buch ist 1807 herausgekommen.

kannt, durch die Benutzung bei sehr wichtigen astronomischen Aufgaben in den Gebrauch eingeführt *). Gauß's Werk bekam ich im Anfange des Jahres 1811 zu Gesicht: ich staunte über die Einfachheit der hier angeführten Gleichungen, und über ihren Gebrauch. Sogleich suchte ich einen Beweis für dieselben, und sandte ihn, so wie er hier geführt wurde, den 24. März 1811 der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Petersburg. Delambre brachte in der Connoissance des tems 1812 gegen Gauß in Erinnerung: Es seyen die genannten Formeln von ihm zuerst erfunden; lieferte aber immer noch keinen Beweis derselben. Erst in seinem großen und vortrefflichen Werke über die Astronomie, welches in Paris 1814 erschien, führt er den Beweis auf eine ganz andere Art, indem er diese Gleichungen aus den Nepper'schen Analogien abzuleiten sucht **); was die Rechnung verwickelter und weitläuftiger macht. Die Rechnung, so wie ich sie hier geführt habe, zeigt, daß diese Gleichungen aus den Cagnolischen erhalten werden, indem man die zwei Werthe für cos A mit den zwei Werthen für cos a combinirt, oder überhaupt, indem man die zwei Werthe für den Cosinus des Winkels mit den zwei Werthen für den Cosinus der Seite, die diesem Winkel gegenübersteht, verbindet; auf diese Weise gelangt man zu einem einfachern und allgemeinern Beweise: denn jede Cagnolische Gleichung, wenn man den Winkel im ersten Theile derselben durch den Cosinus ausdrückt, und den Cosinus der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite im andern Theile der Gleichung nimmt, und auf die bereits angedeutete Weise verfährt, liefert uns vier

*) Car. Fr. Gauss Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburg 1809. pag. 51.

**) Delambre Astronomie. Paris 1814. Tom. II. p. 161—163.

ähnliche Gleichungen. Und so erhält man aus der Gleichung $[\beta_2]$ folgende:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C};$$

aus der Gleichung $[\beta_3]$ aber folgende vier:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}B};\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\sin\frac{1}{2}b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}B};$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+C)}{\cos\frac{1}{2}B};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)}{\cos\frac{1}{2}b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C)}{\sin\frac{1}{2}B};$$

hierin sind nun alle Combinationen der Seiten und Winkel enthalten: was die Folge des allgemeinen und direct abgeleiteten Beweises aus seinem eigenthümlichen Princip ist. Indem ich den Beweis noch kürzer zu geben versuchte, traf ich auf die Gleichungen $[\alpha,]$ in §.2: konnte aber aus ihnen die Delambreschen Gleichungen einzeln nicht erhalten. Denn man sieht, daß die eine Gleichung $[\alpha,]$ das Product von II. durch III., die andere aber von I. durch IV. ist.

Obgleich im sphärischen Dreiecke keine von den Seiten und auch keiner von den Winkeln weder gleich noch größer als 180° seyn kann: so können doch oft negative Winkel vorkommen; eines negativen Winkels Sinus ist aber immer negativ; die Gleichung I. $\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}$ zeigt also, daß, weil die erste Seite wirklich positiv ist, es auch die andere Seite dieser Gleichung wird seyn müssen; es ist demnach $B-C$ mit $b-c$ gleichartig, das heißt: beide sind entweder zugleich positiv, oder auch beide zugleich negativ; ist also $B>C$, so muß auch $b>c$, und ist $B<C$, so muß auch $b<c$ seyn, das heißt: in jedem sphärischen Dreiecke liegt die größere Seite dem größeren Winkel, und die kleinere Seite dem kleineren Winkel gegenüber, und umgekehrt: der größere

Winkel steht der größeren Seite, und der kleinere Winkel der kleineren Seite gegenüber. Die Gleichung II. lehrt uns, daß die Differenz zweier Winkel, und die Gleichung III., daß die Differenz zweier Seiten immer kleiner als 180° ist. Endlich erhellt noch aus der Gleichung IV., daß die Summe zweier Winkel mit der Summe zweier diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten immer gleichartig ist, d. h. entweder sind beide Summen zugleich größer, oder auch beide zugleich kleiner als 180°.

Nepper's Gleichungen (Analogien).

§. 7.

Wenn wir erstens die Gleichung I. durch II., zweitens III. durch IV., drittens I. durch III., viertens II. durch IV. dividiren; so erhalten wir sofort folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\,\frac{B-C}{2} &= \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)},\\ \text{tang}\,\frac{B+C}{2} &= \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)};\end{aligned}\right\}\;[5_{\text{I}}]$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\,\frac{b-c}{2} &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)},\\ \text{tang}\,\frac{b+c}{2} &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}.\end{aligned}\right\}\;[5_{\text{II}}]$$

Die vorstehenden Gleichungen werden auch noch die Nepper'schen Analogien genannt: vermittelst der zwei ersteren von diesen Gleichungen findet man aus zwei bekannten Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zwei Winkel; vermittelst der zwei letzteren aber aus zwei Winkeln und der ihnen anliegenden Seite zwei Seiten. Die Gleichungen I., II., III., IV. können, eine durch die andere dividirt, sechs Quotienten geben, weil $\frac{4.3}{2} = 6$ ist; vier Divisionen führen uns auf die Nepper'schen Analogien, die zwei übrigen aber, nämlich II.

durch III. und I. durch IV., auf die Gleichungen [α_I] in §. 3. Die Gleichungen [5_I] [5_{II}] folgen aus den aus [β_1] abgeleiteten Gleichungen. Eine ähnliche Division bei den aus [β_2] [β_3] abgeleiteten Gleichungen giebt uns zwei Paare aus jeder, und deshalb im Allgemeinen sechs Paare von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \tang \frac{A-B}{2} &= \cotg \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}, \\ \tang \frac{A+B}{2} &= \cotg \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}; \end{aligned}\right\} [5_{III}]$$

$$\left.\begin{aligned} \tang \frac{a-b}{2} &= \tang \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}, \\ \tang \frac{a+b}{2} &= \tang \tfrac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}; \end{aligned}\right\} [5_{IV}]$$

$$\left.\begin{aligned} \tang \frac{A-C}{2} &= \cotg \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c)}, \\ \tang \frac{A+C}{2} &= \cotg \tfrac{1}{2} B \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)}; \end{aligned}\right\} [5_{V}]$$

$$\left.\begin{aligned} \tang \frac{a-c}{2} &= \tang \tfrac{1}{2} b \frac{\sin \frac{1}{2}(A-C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)}, \\ \tang \frac{a+c}{2} &= \tang \tfrac{1}{2} b \frac{\cos \frac{1}{2}(A-C)}{\cos \frac{1}{2}(A+C)}; \end{aligned}\right\} [5_{VI}]$$

diese sechs Paare von Gleichungen enthalten alle Combinationen der Seiten und der von ihnen eingeschlossenen Winkel, als: b, c, A; b, a, C; a, c, B; und wiederum aller Winkel und der ihnen anliegenden Seiten, als: B, C, a; A, B, c; A, C, b. Auch folgt aus irgend einem Paare der vorstehenden Gleichungen:

$$\tang \tfrac{1}{2}(A+B).\ \cos \tfrac{1}{2}(a+b) = \cotg \tfrac{1}{2} C.\ \cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$

oder

$$\tang \tfrac{1}{2}(a+b).\ \cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \tang \tfrac{1}{2} c.\ \cos \tfrac{1}{2}(A-B):$$

bei jeder von diesen Gleichungen ist die zweite Seite durchaus positiv; weil sowohl jeder Winkel, als auch jede Seite, immer kleiner als 180° ist, es muß also auch die erste Seite positiv seyn, und folglich ist die halbe Summe zweier Winkel und die halbe Summe zweier Seiten, die diesen

Winkeln gegenüberstehen, immer gleichartig, d. h. es sind entweder beide zugleich spitz, oder auch beide zugleich stumpf.

Fälle, die in den Nepper'schen Analogien nicht enthalten sind.

§. 8.

Es muß hier noch folgender Fall überlegt werden: in einem sphärischen Dreiecke sind zwei Seiten b, c, und der von denselben eingeschlossene Winkel A gegeben; wie findet man die dritte Seite a durch Logarithmen? Mit Hülfe der Nepper'schen Analogien bekäme man zuerst die Winkel, und aus diesen Winkeln die Seite. Wie findet man aber sogleich die dritte Seite, ohne vorher die Winkel gesucht zu haben?

$$\cos A.\ \sin b.\ \sin c = \cos a - \cos b.\ \cos c,$$

da nun

$$\cos A = \cos^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} A:$$

so ist

$$(\cos^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} A) \sin b.\ \sin c = \cos a - \cos b.\ \cos c$$

$$(-1 + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A) \sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c = \cos a$$

$$\cos(b+c) + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c = \cos a;$$

setzen wir

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c = \sin^2 n,\quad 2 \sin^2 n = 1 - \cos 2n;$$

$$\cos(b+c) + 1 - \cos 2n = \cos a = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a:$$

so folgt

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \cos 2n - \cos(b+c)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{b+c}{2} + n\right) \sin\left(\frac{b+c}{2} - n\right)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\sin\left(\frac{b+c}{2} + n\right) \sin\left(\frac{b+c}{2} - n\right)\right\}} \quad [m]$$

und die Aufgabe ist gelös't. Oder auch

$$(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A) \sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c = \cos a = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a;$$

und setzt man

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c = \sin^2 \omega,\ 2\sin^2 \omega = 1 - \cos 2\omega,$$

$$\cos(b-c) + \cos 2\omega = 2(1-\sin^2 \tfrac{1}{2}a) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}a:$$

so folgt

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left\{\cos\left(\frac{b-c}{2}+\omega\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}-\omega\right)\right\}}.\ [n]$$

Diese zwei Gleichungen [m] [n] hat Mollweide in der Zeitschrift für Astronomie *), aber ohne Beweis, aufgestellt; hier habe ich den Beweis aus der Fundamentalgleichung abgeleitet. Noch habe ich auf demselben Wege folgende Aufgabe gelös't: Wenn im sphärischen Dreiecke zwei Winkel A, B, und die zwischen ihnen liegende Seite c gegeben ist, wie findet man den dritten Winkel C, ohne vorher die zwei übrigen Seiten bestimmt zu haben? In §. 4. giebt die dritte Hauptgleichung [3]

$$\cos C = \cos c.\ \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B.$$

$$\begin{aligned}\cos C &= (\cos^2 \tfrac{1}{2}c - \sin^2 \tfrac{1}{2}c) \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B\\ &= (-1 + 2\cos^2 \tfrac{1}{2}c) \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B\\ &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}c.\ \sin A.\ \sin B - \cos(A-B);\end{aligned}$$

man setze

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}c.\ \sin A.\ \sin B = \sin^2 x,\ 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$

$$\cos C = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}C = 1 - \cos 2x - \cos(A-B):$$

so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}+x\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}-x\right)\right\}}.\ [p]$$

Und wiederum

$$\begin{aligned}\cos C &= (1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}c) \sin A.\ \sin B - \cos A.\ \cos B\\ &= -\cos(A+B) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}c.\ \sin A.\ \sin B;\end{aligned}$$

und ist

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}c.\ \sin A.\ \sin B = \sin^2 y,\ 2\sin^2 y = 1 - \cos 2y,$$

$$2(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}C) = \cos 2y - \cos(A+B):$$

*) Zeitschrift für Astronomie, Mai, Junius 1816. pag. 459.

so folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left\{\sin\left(\frac{A+B}{2}+y\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-y\right)\right\}}. \quad [q]$$

Delambre hat ebenfalls einen Beweis für die Gleichungen [m] [n], und eine Auflösung der hier angedeuteten Aufgabe gegeben *); jedoch ist bei ihm sowohl im ersten Falle die Seite, als im zweiten der Winkel durch die Tangente, vermittelst einer ziemlich künstlichen und seltenen Umformung ausgedrückt, was Mollweide auch ohne allen Beweis anführt. Obgleich nun die Gleichung $\frac{[m]}{[n]}$ die Tangente der Hälfte der dritten Seite, worin die zwei Hülfswinkel n ω vorkommen, giebt: so wollen wir dennoch einen Ausdruck für die Tangente der dritten Seite a ohne die genannten Hülfswinkel suchen.

$$\cos a = \cos b.\ \cos c + \sin b.\ \sin c.\ \cos A;$$

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c,$$

$$1-\cos a = 2\sin^2\tfrac{1}{2}a = 1-\cos(b-c) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c,$$

$$1+\cos a = 2\cos^2\tfrac{1}{2}a = 1+\cos(b-c) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c;$$

folglich

$$\tan^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1-\cos(b-c)+2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c}{1+\cos(b+c)-2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c}$$

$$= \frac{2\sin^2\tfrac{1}{2}(b-c)+2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c}{2\cos^2\tfrac{1}{2}(b-c)-2\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c};$$

und setzt man Kürze halber

$$k = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}A.\ \sin b.\ \sin c}{\cos^2\tfrac{1}{2}(b-c)};$$

so erhält man

$$\tan^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\tan^2\tfrac{1}{2}(b-c)+k}{1-k}$$

$$= \tan\tfrac{1}{2}(b-c)\left\{\frac{\tan\tfrac{1}{2}(b-c)+k\cot\tfrac{1}{2}(b-c)}{1-k}\right\};$$

---

*) Delambre in der Connoissance des tems l'an 1820. pag. 343.

und wenn man $k \cot g \frac{1}{2}(b - c) = \tan g\, z$ setzt, so folgt

$$\tan g^2 \tfrac{1}{2} a = \tan g \tfrac{1}{2}(b - c) \tan g\, [\tfrac{1}{2}(b - c) + z], \quad [r]$$

wo $\tan g\, z = \dfrac{\sin b.\ \sin c.\ \sin A.\ \tan g \frac{1}{2} A}{\sin (b - c)}$ ist; wird hingegen in der Fundamentalgleichung $\cos A = -1 + 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$ genommen, so hat man sofort:

$$1 - \cos a = 1 - \cos (b + c) - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c,$$

$$1 + \cos a = 1 + \cos (b + c) + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c:$$

und also

$$\tan g^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos (b + c) - 2 \cos^2 \frac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c}{1 + \cos (b + c) + 2 \cos^2 \frac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(b + c) - \cos^2 \frac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c}{\cos^2 \frac{1}{2}(b + c) + \cos^2 \frac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c};$$

wird der Kürze wegen

$$k' = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} A.\ \sin b.\ \sin c}{\cos^2 \frac{1}{2}(b + c)},$$

so bekommt die Gleichung folgende Gestalt:

$$\tan g^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\tan g^2 \frac{1}{2}(b + c) - k'}{1 + k'}$$

$$= \tan g \tfrac{1}{2}(b + c) \left\{ \frac{\tan g \frac{1}{2}(b + c) - k' \cot g \frac{1}{2}(b + c)}{1 + k'} \right\}:$$

es sey nun

$$k' \cot g \tfrac{1}{2}(b + c) = \tan g\, y,$$

und also

$$k' = \tan g\, y.\ \tan g \tfrac{1}{2}(b + c);$$

folglich

$$\tan g^2 \tfrac{1}{2} a = \tan g \tfrac{1}{2}(b + c).\ \tan g\, [\tfrac{1}{2}(b + c) - y] \quad [s]$$

wo $\quad \tan g\, y = \dfrac{\sin b.\ \sin c.\ \sin A.\ \cot g \frac{1}{2} A}{\sin (b + c)};$

indem wir uns zugleich erinnern, daß $2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \sin A.\ \cot g \frac{1}{2} A$ ist.

Aus der Rechnung, die uns auf die Gleichungen [r] [s] geleitet hat, ist zu ersehen: daß die Function des allgemeinen Ausdrucks $\dfrac{\tan g^2 A \mp k}{1 \pm k}$ sich in $\tan g\, A.\ \tan g\, (A \mp z)$ verwandelt; wenn man nämlich $\tan g\, z = k \cot g\, A$ setzt.

Suchen wir auf eine ähnliche Art die Transformation der Gleichungen [p] [q] aus dem angeführten Werthe für cos C: so haben wir

$$1 - \cos C = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C = 1 + \cos(A - B) - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B$$

$$1 + \cos C = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C = 1 - \cos(A - B) + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B;$$

und folglich

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{1 + \cos(A - B) - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B}{1 - \cos(A - B) + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B},$$

ist

$$k = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B .}{\sin^2 \tfrac{1}{2} (A - B)},$$

so erhält man

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cotg^2 \tfrac{1}{2} (A - B) - k}{1 + k}$$

$$= \cotg \tfrac{1}{2} (A - B) \left\{ \frac{\cotg \tfrac{1}{2} (A - B) - k \tang \tfrac{1}{2} (A - B)}{1 - k} \right\};$$

und setzen wir wiederum

$$k \tang \tfrac{1}{2} (A - B) = \tang z,$$

und also

$$k = \tang z . \cotg \tfrac{1}{2} (A - B);$$

so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \cotg \tfrac{1}{2} (A - B) \cotg [\tfrac{1}{2} (A - B) + z] \quad [t];$$

wo

$$\tang z = \frac{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B}{\sin (A - B)},$$

man kann auch noch $2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c = \sin c . \cotg \tfrac{1}{2} c$ setzen.

Endlich erhält man aus den Ausdrücken für cos C, die auf die Gleichung [q] führen, nachstehende:

$$1 - \cos C = 1 + \cos(A + B) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B,$$

$$1 + \cos C = 1 - \cos(A + B) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B,$$

hieraus

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} (A + B) + \sin^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B}{\sin^2 \tfrac{1}{2} (A + B) - \sin^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B};$$

und setzen wir

$$k = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} c . \sin A . \sin B}{\sin^2 \tfrac{1}{2} (A + B)},$$

so ist

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\cotg^2 \tfrac{1}{2}(A+B) + k}{1-k}$$

$$= \cotg \tfrac{1}{2}(A+B) \left\{ \frac{\cotg \tfrac{1}{2}(A+B) + k \tang \tfrac{1}{2}(A+B)}{1-k} \right\};$$

und nennt man

$$k \tang \tfrac{1}{2}(A+B) = \tang z,$$

oder

$$k = \tang z \cotg \tfrac{1}{2}(A+B),$$

so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C = \cotg \tfrac{1}{2}(A+B).\ \cotg [\tfrac{1}{2}(A+B) - z], \quad [u]$$

in welcher

$$\tang z = \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c.\ \sin A.\ \sin B}{\sin (A+B)},$$

und wo man auch noch $2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin c.\ \tang \tfrac{1}{2} c$ setzen könnte.

Aus dieser Rechnung ergiebt sich nun wieder, daß $\frac{\cotg^2 A \pm k}{1 \mp k}$ sich in $\cotg A.\ \cotg (A \mp z)$ verwandelt, wenn $\tang z = k.\ \tang A$ genommen wird.

Wir haben demnach aus der Fundamentalgleichung acht neue trigonom. Gleichungen erhalten, von welchen vier, nämlich [m], [n], [r], [s], zur Auffindung der dritten Seite aus den zwei gegebenen Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel im sphärischen Dreiecke dienen; die vier anderen Gleichungen hingegen [p], [q], [t], [u] bestimmen den dritten Winkel eines sphärischen Dreiecks aus der gegebenen Seite und aus den zwei dieser Seite anliegenden Winkeln. Mehrere Gleichungen für einen und denselben Winkel zu haben, ist bei trigonometrischen Rechnungen von großem Nutzen; denn dadurch wird aller Zweifel in Beziehung auf den Winkel gehoben, und die möglichst genauen Resultate, wenn die Winkel oder Bogen sehr klein, oder auch nahe an 90° sind, erhalten; wie wir es später erfahren werden.

Staatliche Bibliothek

Das sind nun die Hauptgleichungen, die wir aus einer einzigen Gleichung [1] abgeleitet haben, und auf die uns die Betrachtung des sphärischen Dreiecks hinweist. Alle andern bis auf gegenwärtige Zeit bekannten, und unter verschiedenen Gestalten angegebenen Gleichungen in der Trigonometrie sind beinahe nur immer eine Transformation der vier Hauptgleichungen [1], [2], [3], [4], wie wir es bereits an den Cagnolischen, Delambreschen, Nepper'schen und anderen Gleichungen gesehen haben.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§. 9.

Wenden wir das Vorhergehende bei allen Fällen der trigonometrischen Aufgaben an: so sollen, wenn von den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks drei gegeben sind, die drei übrigen gefunden werden; in der analytischen Sprache würde man sich so ausdrücken: es sollen die sechs Größen A, B, C, a, b, c zu vier combinirt werden.

Man erhält $\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 15$ Combinationen *); jedoch wirk-

---

*) Sind m Elemente gegeben, so ist bekanntlich die Anzahl der Combinationen, wenn keine Wiederholung desselben Elements in einer Zusammenstellung verstattet wird,

$$\text{zu zwei: } \frac{m\,(m-1)}{1.\quad 2.}$$

$$\text{zu drei: } \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}$$

$$\text{zu vier: } \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}$$

— — — — — — —

$$\text{und überhaupt: } \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\text{--------}\,(m-(p-1))}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \text{--------}\quad p.}$$

Aus dem Vorstehenden erhellt nun auch die Anzahl der Combinationen zu vier aus den sechs Elementen A, B, C, a, b, c.

Der Anfänger kann hierüber auch noch: Vorbereitungen zur höheren Analysis von Brandes. Leipzig 1820. nachsehen. [F]

lich von einander verschiedene nur vier, wie man sich aus folgender Anordnung überzeugen kann:

$$\begin{array}{llll} A, B, C, a; & a, b, c, A; & A, B, a, b; & \left\{\begin{array}{ll} a, b, C, A; & b, a, C, B; \\ a, c, B, A; & c, a, B, C; \\ b, c, A, B; & c, b, A, C. \end{array}\right\} \\ A, B, C, b; & a, b, c, B; & A, C, a, c; & \\ A, B, C, c; & a, b, c, C; & B, C, b, c; & \end{array}$$

Der erste Fall enthält drei Winkel und eine Seite; der zweite Fall drei Seiten und einen Winkel; der dritte Fall zwei Winkel und die zwei ihnen gegenüberliegenden Seiten; der vierte Fall zwei Seiten und zwei Winkel, von welchen der eine Winkel immer einer der gegebenen Seiten anliegt, der andere aber derselben Seite gegenübersteht; im letzten Falle erhält man eigentlich sechs Combinationen, was auch schon ganz deutlich aus den Gleichungen [4] hervorgeht. Wir haben also um so zu sagen vier Classen, und ganz verschiedene Combinationen; in jeder Classe aber so viel einander ähnliche Gleichungen, als derselben Combinationen zukommen. Wir wollen mit dem rechtwinkligen Dreiecke den Anfang machen, dasselbe ist ein besonderer Fall unserer Aufgabe, hat aber eigenthümliche Kennzeichen.

Es sey der Winkel $A = 90°$, so wird a die Hypotenuse seyn: $\sin A = 1$, $\cos A = o$, $\operatorname{tang} A = \frac{1}{o} = \infty$, $\operatorname{cotg} A = o$; werden diese Bedingungen sowohl in die Fundamentalgleichung, als Hauptgleichungen eingeführt: so ist

I. Fall. Die Gleichung [1]

$$[a] \quad \cos a = \cos b . \cos c;$$

durch diese Gleichung wird folgende Aufgabe gelös't: wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke zwei Seiten gegeben sind, so findet man die dritte; auch lehrt uns die nämliche Gleichung, daß, wenn die zwei Catheten in diesem Dreiecke, entweder beide zugleich kleiner, oder beide zugleich größer, als 90° sind, die Hypotenuse immer kleiner als 90° seyn muß; oder kürzer: sind b, c gleichartig, so ist immer $a < 90°$; sind

hingegen b, c ungleichartig, dann ist $a > 90^\circ$; ist demnach die Hypotenuse mit irgend einer der Catheten gleichartig: so muß die andere Cathete durchaus kleiner als 90° seyn; ist aber die Hypotenuse mit irgend einer der Catheten ungleichartig: so muß die andere Cathete durchaus größer als 90° seyn. Alles beruht nämlich auf folgendem Princip: daß der Cosinus eines spitzen Winkels positiv, eines stumpfen aber negativ sey. Uebrigens ist die Gleichung leicht zu behalten. Ferner könnten wir auch noch den Werth für $\cos a$ in die zwei folgenden Gleichungen von [1] einführen, und es ergäbe sich $\cos B = \cos b . \sin C$, $\cos C = \cos c . \sin B$; wir erhalten aber diese Gleichungen anders woher.

II. Fall. Wird die Bedingung $\sin A = 1$ in die Gleichung [2] eingeführt: so erhält man

$$[b] \quad \frac{1}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \text{ und folglich } \frac{\sin c}{\sin a} = \sin C,$$

oder

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \sin a, \quad \sin c = \sin a . \sin C;$$

durch diese Gleichung werden nun wieder folgende Aufgaben gelös't: hat man die Hypotenuse und eine Cathete, so findet man den dieser Cathete gegenüberstehenden Winkel, oder auch: ist die Cathete und der ihr gegenüberstehende Winkel gegeben, so findet man die Hypotenuse, oder wenn die Hypotenuse und irgend einer der anliegenden Winkel gegeben ist, so findet man die diesem Winkel gegenüberstehende Cathete.

III. Fall. Die Bedingungen des rechten Winkels in die Gleichungen [3] eingeführt: so ist

$$[c] \quad \cos a = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C = \frac{1}{\operatorname{tang} B . \operatorname{tang} C};$$

$$[d] \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B};$$ die schon im I. Falle angedeuteten Gleichungen.

Die mit [c] bezeichnete Gleichung löſ't uns folgende zwei Aufgaben: aus zwei gegebenen Winkeln die Hypotenuſe zu beſtimmen, oder aus der Hypotenuſe und einem Winkel den andern Winkel zu finden.

Durch [d] werden aber folgende Aufgaben gelöſ't: ſind zwei Winkel gegeben, ſo findet man eine Cathete, die einem von dieſen Winkeln gegenüberſteht, oder aus der Cathete und dem ihr gegenüberliegenden Winkel findet man den zweiten Winkel, und aus einer Cathete und dem ihr anliegenden Winkel beſtimmt man den zweiten Winkel.

IV. Fall. Unter den mit [4] bezeichneten ſechs Gleichungen in §. 5. enthalten nur vier den Winkel A; in jedem Paare aber findet die nämliche Verbindung Statt, wie wir ſolches gleich ſehen werden. Geſetzt, es ſey in den Gleichungen [4] $\cot A = 0$, $\sin A = 1$; ſo erhält man:

$$[e] \begin{cases} \cot a . \sin b = \cos b . \cos C, \text{ oder } \dfrac{\tan b}{\tan a} = \cos C \\ \cot a . \sin c = \cos c . \cos B, \quad \dfrac{\tan c}{\tan a} = \cos B \end{cases}$$

$$[f] \begin{cases} \cot b . \sin c = \cot B, \text{ oder } \tan B = \dfrac{\tan b}{\sin c}; \\ \cot c . \sin b = \cot C, \quad \tan C = \dfrac{\tan c}{\sin b}. \end{cases}$$

Die Gleichungen [e] löſen nachſtehende Aufgaben: aus der Hypotenuſe und einer Cathete kann der dieſer Cathete anliegende Winkel gefunden werden; aus einer Cathete und dem ihr anliegenden Winkel wird die Hypotenuſe gefunden; aus der Hypotenuſe und einem Winkel wird die dieſem Winkel anliegende Cathete gefunden.

Die Gleichungen [f] geben uns die Auflöſung für folgende Aufgaben: aus beiden Catheten ſoll ein Winkel, der einer derſelben gegenüberſteht, gefunden werden; aus einem Winkel und der ihm gegenüberliegenden Cathete kann die andere Cathete

gefunden werden; aus einem Winkel und der ihm anliegenden Cathete wird die diesem Winkel gegenüberstehende Cathete abgeleitet.

Die Gleichungen [f] zeigen uns noch: daß in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der schiefe Winkel mit der ihm gegenüberstehenden Cathete immer von einerlei Art ist, d. h.: entweder sind beide zugleich spitz oder beide zugleich stumpf. Die Gleichungen [a], [b], [c], [d], [e], [f] sind hinreichend, um alle Fragen, welche in Hinsicht auf die zu bestimmenden Seiten und Winkel im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke vorkommen können, aufzulösen.

Dreiecke, in welchen zwei und drei rechte Winkel vorkommen.

§. 10.

Wenn wir im vorhergehenden §. von dem rechtwinkligen Dreiecke sprachen, so war immer ein solches zu verstehen, welches nur einen rechten Winkel enthielt. Da nun aber §. 4. gezeigt wurde, daß die Summe aller Winkel im sphärischen Dreiecke immer größer, als 180° ist: so kann das sphärische Dreieck zwei, ja selbst drei rechte Winkel enthalten. Enthält das Dreieck zwei rechte Winkel, z. B. $A=90°$, $B=90°$, also $\sin A=1$, $\cos A=0$; $\sin B=1$, $\cos B=0$: so ist diese Bedingung in die Gleichungen [3] §. 4. eingeführt, $\cos a=0$, $\cos b=0$, also $a=b=90°$; dazu ist $\cos c=\cos C$, also $c=C$; und folglich wird ein solches Dreieck gleichschenklig seyn. Die Seiten, welche den beiden rechten Winkeln gegenüberstehen, werden Kreisquadranten, die Seite c aber, welche dem Winkel C gleich ist, wird das Maaß dieses Winkels seyn; oder mit anderen Worten: der Winkelpunct C ist der Pol des Bogens c. Hieraus erhellt nun zugleich ganz deutlich, daß die Winkel auf der Kugeloberfläche, die, wie wir wissen, die Neigungswinkel

derjenigen Ebenen, welche die Kugel durchschneiden, darstellen, den aus den Scheitelpuncten in einer Entfernung von 90° gezeichneten Bogen gleich sind, und deshalb auch von jenen Bogen gemessen werden, was bereits aus den Eigenschaften der Kugel bekannt ist. Wenn wir die auf c senkrechten Bogen auf der andern Seite von c weiter verlängern: so werden sie sich im zweiten Pole begegnen, und einen Raum auf der Oberfläche der Kugel einschließen; diesen, auf der Oberfläche der Kugel zwischen zwei größten Kreisen eingeschlossene Raum werden wir den spitzigen Streifen der Kugeloberfläche nennen. Bei den Franzosen wird dieser Streifen die Spindel (fuseau) genannt. Den sphärischen Körper, den ein solcher Streifen umschließt, nennen die Franzosen **Onglet sphérique**; wir wollen diesen Körper den sphärischen Keil nennen, welchen man sich auch als aus zwei gleichen Pyramiden zusammengesetzt denken kann. Bei der practischen Verfertigung der Erd- und Himmelsgloben wird die Oberfläche der Kugel in solche spitzige Streifen eingetheilt, diese werden einzeln abgedruckt, und mit denselben wird dann die gegossene oder auf irgend eine Art verfertigte Kugel bezogen.

Wenn das sphärische Dreieck drei rechte Winkel enthält, oder $A = B = C = 90°$: so ist $\sin A = \sin B = \sin C = 1$, $\cos A = \cos B = \cos C = 0$; werden diese Bedingungen in die Gleichungen [3] §. 4. eingeführt: so erhält man $\cos a = 0$, $\cos b = 0$, $\cos c = 0$, und folglich $a = b = c = 90°$; das Dreieck ist demnach gleichwinklig und gleichseitig, und jede Seite desselben einem Kreisquadranten gleich; es wird also der Scheitelpunct eines jeden Winkels der Pol des ihm gegenüberstehenden Bogens seyn. Die ganze Oberfläche der Halbkugel besteht aus vier solchen Dreiecken.

Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

§. 11.

Im schiefwinkligen sphärischen Dreiecke kommen 15 Aufgaben oder Fälle vor, für welche wir nun eben so viel Gleichungen [1], [2], [3], [4] haben. Unter diesen 15 Fällen giebt es jedoch nur vier wirklich von einander verschiedene Aufgaben. Es würde demnach hinlänglich seyn, diese Aufgaben herzuzählen, und auf die, jedem Falle entsprechenden Gleichungen hinzuweisen. Aber hier dürfen zwei wichtige Bemerkungen nicht übergangen werden; erstens: denken wir uns vor der Hand nur solche Dreiecke, in denen jeder Winkel und jede Seite kleiner, als 180° ist: so ist klar, daß, so oft der Werth des zu suchenden Winkels oder der zu suchenden Seite durch den Sinus ausgedrückt wird, die Antwort zweideutig bleibt; denn derselbe Sinus, und mit demselben positiven Zeichen, gehört sowohl zu einem spitzigen, als stumpfen Winkel. Hier bei diesen Winkeln kann uns bloß der Cosinus und die Tangente Aufschluß geben; denn sowohl der Cosinus, als auch die Tangente sind bei spitzen Winkeln positiv, bei stumpfen hingegen negativ. Zweitens: sind die Gleichungen [1], [3], [4] unbequem zum logarithmischen Gebrauche. Die Glieder, durch Addition und Subtraction in diesen Gleichungen mit einander verbunden, zeigen uns die Nothwendigkeit des Ueberganges von den Logarithmen zu den ihnen zugehörigen Zahlen, und von diesen wieder zu den Logarithmen; was nun nicht nur die ganze Rechnung langwierig macht, sondern auch von der Erhaltung genauer Resultate entfernt. Aus der Lehre über die Logarithmen wissen wir, daß die logarithmischen Tafeln nur eine Annäherung zur Wahrheit geben, und eben so verhält es sich mit den trigonometrischen Tafeln; wählt man demnach den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen, und kehrt von den Zahlen abermals

zu den Logarithmen zurück: so entfernt man sich bei jeder Operation von der Wahrheit.

Aus dem Gesagten wird nun jeder leicht entnehmen, daß erstens die Gleichungen [1], [3], [4] in solche verwandelt werden müssen, wo nur Multiplication und Division vorkäme, und das haben wir bereits an den Gleichungen [1'], [1''], [1''']; [3'], [3''], [3'''] gezeigt, es bleibt uns also nur noch übrig, eine ähnliche Veränderung mit den Gleichungen [4] vorzunehmen; zweitens muß man so viel als möglich aus der Gleichung für den Winkel oder Bogen den Sinus, der eben die Zweideutigkeit herbeiführt, zu entfernen suchen.

I. Aufgabe. In einem schiefwinkligen sphärischen Dreiecke sind alle drei Seiten gegeben, man sucht die Winkel.

Diese Aufgabe wird durch die Gleichungen [1'], [1''], [1'''] in §. 2. gelös't, wo die Hälfte eines jeden Winkels durch die durchaus positive Tangente ausgedrückt ist; da nun jeder Winkel kleiner, als 180° ist: so gehört das negative Zeichen nach der Wurzelausziehung nicht zur trigonometrischen Frage. Wäre der Winkel sehr klein, so würde es nicht rathsam seyn, denselben durch den Cosinus auszudrücken; denn nähert sich der Cosinus in Hinsicht eines Werthes dem Radius, so erleidet er eine sehr geringe Veränderung. Dieselbe Unbequemlichkeit kommt nun auch beim Sinus vor, wenn nämlich der Winkel sehr nahe an 90° ist. Die Tangente aber ist von allen diesen Unbequemlichkeiten frei, und bei der Auflösung der eben angedeuteten Aufgabe findet weiter kein Zweifel Statt.

II. Aufgabe. Kennt man die drei Winkel in einem Dreiecke, so sollen die Seiten gefunden werden.

Die Gleichungen [3'], [3''], [3'''] in §. 4. lösen diese Aufgabe vollständig. Hier muß das Nämliche in Erwägung gezogen werden, auf was wir bei der Aufgabe I. aufmerksam machten; und es giebt keine Ungewißheit in Hinsicht des Win-

kels. Uebrigens stößt man bei der practischen Ausübung beinahe nie auf diese Aufgabe.

III. Aufgabe. Es sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, man sucht die zwei übrigen Winkel und die dritte Seite.

Diese Aufgabe wird sehr häufig in der Astronomie gebraucht; und in Hinsicht der Winkel wird dieselbe durch die Nepper'schen Analogien [5I], [5III], [5V] in §. 7. gelös't. Hat man nun die halbe Summe und die halbe Differenz zweier Winkel gefunden, so geben diese, addirt zu einander, den größern Winkel, von einander subtrahirt aber den kleinern Winkel.

Die dritte Seite kann durch den Sinus nach [2] in §. 3. gefunden werden, oder auch vermittelst der Gleichungen [1] auf folgende Art. Die erste Gleichung [1] giebt

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos A.\ \sin b.\ \sin c + \cos b.\ \cos c \\ &= \cos c\,(\cos b + \cos A.\ \operatorname{tang} c.\ \sin b) \\ &= \cos c\,(\cos b + \operatorname{tang} \varphi.\ \sin b) \\ &= \frac{\cos c}{\cos \varphi}(\cos b.\ \cos \varphi + \sin b.\ \sin \varphi) \\ &= \frac{\cos c}{\cos \varphi}\cos(b - \varphi); \end{aligned}$$

hier haben wir $\cos A.\ \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} \varphi$ gesetzt; der Winkel φ wird bei den Analysten der Hülfswinkel (angulus auxiliaris) genannt. Wir wollen überlegen, was eigentlich derselbe für eine Bedeutung hat. Die Gleichung

$$\cos A.\ \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} \varphi$$

ist die Gleichung [e] für das rechtwinklige Dreieck in §. 9., wo c die Hypotenuse bedeutet. Es wird demnach im schiefwinkligen sphärischen Dreiecke A B C, wenn man von dem Winkel B einen Bogen auf die gegenüberstehende Seite b senkrecht fällt, die Seite b in zwei Abschnitte getheilt, nämlich: in den Abschnitt φ, welcher dem Winkel A oder der Seite c anliegt;

und in den Abschnitt $b-\varphi$, welcher dem Winkel C oder der Seite a anliegt. Die Gleichung

$$\frac{\cos c}{\cos a}=\frac{\cos \varphi}{\cos (b-\varphi)}$$

lehrt uns, daß sich die Cosinus der Seiten wie die Cosinus der diesen Seiten anliegenden Abschnitte verhalten; was man die Regel der Cosinus (prawidto dostaw) nennt. Man sieht also, daß die Annahme eines Hülfswinkels von den Analysten oft die Zerlegung des schiefwinkligen Dreiecks in zwei rechtwinklige durch ein gefälltes Perpendikel anzeigt.

Man kann aber auch aus zwei gegebenen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel sogleich die dritte Seite durch die Gleichungen [m], [n], [r], [s] in §. 8. finden; jede dieser Gleichungen wird uns immer die nämlichen Resultate geben, wenn nur die Seite nicht allzu klein ist, denn im letzten Falle würde man die Gleichung [n] nicht anwenden können; für den zweifelhaften Winkel könnte wieder die Gleichung [m] nicht gebraucht werden, wohl aber die Gleichungen [r], [s], welche die Zweideutigkeit des Bogens heben, und zugleich genaue Resultate liefern. Hat man nun vermittelst dieser Gleichungen die dritte Seite eines Dreiecks gefunden, und ist schon ein Winkel bekannt, so kann man, ohne die Nepper'schen Analogien anzuwenden, mit Hülfe der ziemlich einfachen Gleichungen [$1_{,}$], [$1_{,,}$], [$1_{,,,}$] in §. 2. die zwei andern Winkel finden, und hier zeigt sich zugleich der Nutzen dieser Gleichungen in der Trigonometrie.

IV. Aufgabe. Sind zwei Winkel und die anliegende Seite gegeben: so findet man die zwei Seiten und den dritten Winkel.

Zur Auffindung der Seiten bei dieser Aufgabe werden die Nepper'schen Analogien [5_{II}], [5_{IV}], [5_{VI}] in §. 7. gebraucht, der dritte Winkel wird vermittelst der Gleichungen [2]

in §. 3. gefunden, oder auch mit Hülfe der Gleichungen [3] in §. 4. auf folgende Art:

$$\cos A = \cos a.\ \sin B.\ \sin C - \cos B.\ \cos C,$$

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \cos a.\ \operatorname{tang} C.\ \sin B - \cos B;$$

es sey

$$\cos a.\ \operatorname{tang} C = \operatorname{cotg.}\ x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

also

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{\sin B.\ \cos x - \cos B.\ \sin x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin (B - x)}{\sin x},$$

und folglich der dritte Winkel

$$\cos A = \frac{\cos C.\ \sin (B - x)}{\sin x}.$$

Hier ist nun ebenfalls wieder klar, daß die Gleichung für den Hülfswinkel

$$\cos a.\ \operatorname{tang} C = \operatorname{cotg} x$$

die Gleichung [c] für das rechtwinklige sphärische Dreieck ist, wo a die Hypotenuse bedeutet; und zieht man von dem Winkel B einen senkrechten Bogen auf die gegenüberstehende Seite: so wird der Winkel B durch diesen senkrechten Bogen in zwei andere zerlegt, von denen derjenige, welcher der Seite a anliegt, x heißt. Bei der Auflösung dieser Aufgabe kommt keine Zweideutigkeit vor.

Aus zwei Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite können wir sogleich den dritten Winkel durch die Gleichungen [p], [q], [t], [u] in §. 8. finden. Sind hingegen alle drei Winkel in einem Dreiecke und eine Seite gegeben: so findet man die zwei anderen Seiten durch die Gleichungen [3,], [3,,], [3,,,] in §. 4. Hier sehen wir nun wiederum, wie auch diese Gleichungen in der Trigonometrie ihre Anwendung finden.

V. Aufgabe. Wenn zwei Seiten nebst dem einer Seite gegenüberstehenden Winkel bekannt sind, die zwei anderen Winkel und die dritte Seite zu finden.

Diese Aufgabe wird durch die Gleichungen [4] in §. 5. gelös't, jede, wie man sieht, enthält zwei Seiten und zwei Winkel, und einer der Winkel liegt einer der Seiten gegenüber. Die erste Gleichung z. B. [4] enthält a, c, A, und man bekömmt B; die andere hingegen a, b, A, und man findet C; der erste Theil der Aufgabe, in Beziehung auf das Aufsuchen der Winkel, scheint demnach leicht zu seyn. Aber so wie in der ersten Gleichung B, so wird in der zweiten C durch den Sinus und Cosinus zugleich ausgedrückt; die Gleichungen können also nicht aufgelös't werden, sondern man muß jeden gesuchten Winkel durch eine und dieselbe trigonometrische Linie auszudrücken suchen; und folglich muß entweder der Sinus in den Cosinus, oder der Cosinus in den Sinus verwandelt werden. Da nun aber $\sin C = \sqrt{(1 - \cos^2 C)}$, $\cos C = \sqrt{(1 - \sin^2 C)}$: so werden wir eine Gleichung vom zweiten Grade haben. Die zwei Wurzeln dieser Gleichung verursachen hier eine Zweideutigkeit, indem wir nicht sogleich wissen können, welche Wurzel zu unserer Aufgabe gehöret? Die Auflösung dieser Aufgabe ist demnach ein zweideutiger Fall in der Trigonometrie. Und wenn wir auch durch einen Kunstgriff der Gleichung vom zweiten Grade auszuweichen suchen, dennoch wird der Fall nicht aufhören zweideutig zu seyn, wie wir uns sofort überzeugen werden. Betrachten wir die Gleichung [4']

$$\cot a = \cot b . \cos C + \frac{\cot A}{\sin b} . \sin C,$$

und setzen

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \tan x,$$

$$\cot a = \cot b (\cos C + \tan x . \sin C)$$

$$= \frac{\cot b}{\cos x} \cos (C - x):$$

so folgt

$$\cos(C-x)=\frac{\text{cotg}\,a.\ \cos x}{\text{cotg}\,b}=\cos(x-C).$$

$C-x+x=x-(x-C)=C$; dieser Winkel kann also zwei Werthe haben, denn es ist sowohl der Cosinus des positiven, als auch der des negativen Winkels immer positiv; der Hülfswinkel x wird aus der Gleichung [c] §. 9., wo b die Hypotenuse ist, erhalten. Das Perpendikel theilt den Winkel C in zwei Theile, wo x den der Seite b anliegenden Winkel anzeigt.

Auf ähnliche Art findet man, wenn

$$\frac{\text{cotg}\,A}{\cos c}=\text{tang}\,x \text{ gesetzt wird,}$$

$$\cos(B-x)=\frac{\text{cotg}\,a.\ \cos x}{\text{cotg}\,c}.$$

Die dritte Seite wird durch die Sinus, vermittelst der Gleichungen [2] §. 3., oder auch mit Hülfe der in der III. Aufgabe des gegenwärtigen §. auseinandergesetzten Regel der Cosinus gefunden. Wären im ersten Falle a, b, A bekannt, so würde man c aus [1] finden:

$$\cos c=\cos C.\ \sin a.\ \sin b+\cos a.\ \cos b$$
$$=\cos b.\ [\cos C.\ \text{tang}\,b.\ \sin a+\cos a];$$

und ist

$$\cos C.\ \text{tang}\,b=\text{tang}\,x:$$

so erhält man

$$\cos c=\frac{\cos b}{\cos x}\cos(a-x).$$

Im zweiten Falle sind A, a, c bekannt, man soll b finden. Setzen wir $\cos B.\ \text{tang}\,c=\text{tang}\,x$, so erhellt

$$\cos b=\frac{\cos c}{\cos x}\cos(a-x).$$

VI. Aufgabe. Zwei Winkel und die einem Winkel gegenüberstehende Seite sind gegeben, man sucht die zwei anderen Seiten und den dritten Winkel.

Diese Aufgabe wird, so wie die vorhergehende, vermittelst der Gleichungen [4] §. 5. gelös't, wo die Seite, die dem ge-

gebenen Winkel anliegt, durch den Cosinus und Sinus zugleich ausgedrückt wird; sie kann also zwei Werthe haben, und das Resultat aus eben der Ursache, die wir bereits in der vorhergehenden Aufgabe angeführt haben, zweideutig machen. Haben wir A, C, a, und suchen b, c, B: so giebt die Gleichung [4']

$$\frac{\text{cotg a}}{\text{cos C}} . \sin b - \cos b = \text{tang C. cotg A};$$

es sey

$$\frac{\text{cotg a}}{\text{cos C}} = \text{cotg x},$$

$$\frac{\sin b. \cos x - \sin x. \cos b}{\sin x} = \text{tang C. cotg A},$$

$$\sin(b - x) = \sin x. \text{ tang C. cotg A}.$$

Hier kann der Bogen b — x entweder zu einem spitzen, oder zu einem stumpfen Winkel gehören. Einen ähnlichen Werth erhält man für c aus der Gleichung [4], wenn B als bekannt vorausgesetzt wird. Ist

$$\frac{\text{cotg a}}{\text{cos B}} = \text{cotg x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

so folgt

$$\sin(c - x) = \sin x. \text{ tang B. cotg A}.$$

Alle Combinationen, welche zwischen den Winkeln und der gegenüberstehenden Seite vorkommen können, lassen sich leicht aus den übrigen Gleichungen [4] ableiten. Was aber den dritten Winkel z. B. B betrifft, so kann derselbe aus den Gleichungen [2] in §. 3. mit Hülfe der Sinus erhalten werden; oder auch aus den Gleichungen [3] in §. 4., wie folgt:

$$\cos B = \cos b. \sin A. \sin C - \cos A. \cos C,$$

$$\frac{\cos B}{\cos A} = \cos b. \text{ tang A. } \sin C - \cos C;$$

und ist

$$\cos b. \text{ tang A} = \text{cotg x},$$

so erhält man

$$\cos B = \frac{\cos A. \sin(C - x)}{\sin x}.$$

Die zweideutigen Fälle, welche in den beiden letzten Gleichungen vorkommen, werden nun theils durch die Bedingungen der Frage selbst, theils auch durch die allgemeinen Eigenschaften des sphärischen Dreiecks, vorzüglich aber durch folgende Ueberlegung gehoben, nämlich: daß die größere Seite dem größeren Winkel gegenübersteht, und daß der größere Winkel eine größere gegenüberliegende Seite hat. Selbst andere Winkel, die von einander abhängen, oder sich gegenseitig bestimmen, tragen viel bei, um alle Zweideutigkeit zu entfernen. Endlich wird die Zweideutigkeit auch noch durch das Resultat, welches man aus verschiedenen Gleichungen vermittelst anderer trigonometr. Linien zu erhalten sucht, gehoben. Es ist deshalb bei ähnlichen Fällen sehr rathsam, mehrere Gleichungen für einen und denselben Bogen oder Winkel, durch verschiedene trigonometrische Linien ausgedrückt, zu besitzen.

Weitere Ausdehnung der Lehre von den sphärischen Dreiecken, nebst Regeln für die Zeichen.

§. 12.

Wir haben nun hier alle möglichen Fälle bei der Auflösung der sphärischen Dreiecke betrachtet, und zugleich Mittel angegeben, wie man, wenn drei Stücke gegeben sind, die übrigen finden kann. Im rechtwinkligen Dreiecke ist es hinreichend, zwei Stükke zu wissen, denn der rechte Winkel ist das dritte bekannte Stück. Obgleich nun in der Trigonometrie jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180° betrachtet wird: so kommen dennoch bei astronomischen Fragen Bogen und Winkel vor, welche sich von 0° bis 360° ziehen. Wird die Antwort zu einer solchen Frage, vermittelst der sphärischen Trigonometrie, gesucht: so kommen wir auf Winkel und Bogen, welche entweder größer als 180° sind, und mithin zum dritten Quadranten gehören; oder auch die Ergänzung zu 360° ausmachen, und also

zum vierten Quadranten gehören. Im ersten Falle bekämen wir unsern Winkel, wenn wir das aus der Rechnung Erhaltene zu 180° addirten, im zweiten Falle aber, wenn wir es von 360° abzögen. Und man wird in diesem Verfahren nichts Sonderbares finden, wenn man überlegt: daß die Rechnung hier vermittelst trigonometr. Linien geführt wird, von welchen jede unendlich vielen Bogen und Winkeln entsprechen kann, denn der Bogen oder Winkel ist eine transcendente Function der trigonometrischen Linien. Was aber für ein Bogen oder Winkel unserer Aufgabe entspricht? entscheidet öfters nur der Gang der analytischen Rechnung durch das positive und negative Zeichen. Auf diese Zeichen muß also auch während der ganzen Rechnung unsere Aufmerksamkeit gerichtet seyn. Ist der Bogen oder Winkel durch die Tangente ausgedrückt, so läßt er sich sogleich mit Gewißheit angeben.

Es möge die Tangente durch folgenden Bruch angedeutet werden, z. B.:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{p}{q},$$

wo der Zähler den Sinus, der Nenner hingegen den Cosinus anzeigt; so wird sich zeigen, daß der Bogen oder Winkel φ

zum ersten Quadranten gehöret, wenn $\text{tang}\,\varphi = \frac{+p}{+q}$;

zum zweiten, wenn $\text{tang}\,\varphi = \frac{+p}{-q}$;

zum dritten, wenn $\text{tang}\,\varphi = \frac{-p}{-q}$;

zum vierten, wenn $\text{tang}\,\varphi = \frac{-p}{+q}$.

Der Grund hievon ist leicht zu übersehen *).

---

*) Anmerk. Anfängern ist da, wo Bogen größer als 180° vorkommen, doch immer zu empfehlen, daß sie durch eine dem besonderen Falle ungefähr angemessene Zeichnung sich

Formeln und Gleichungen von sehr häufigem Gebrauche in der Analysis.

§. 13.

I. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, wie nützlich und wichtig es oft sey, den durch den Cosinus gegebenen Winkel oder Bogen durch die Tangente auszudrücken, was auf folgende Weise leicht geschehen kann.

Es ist bekanntlich *)

$$2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = \operatorname{tang} x (1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x),\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x.\ \cos \tfrac{1}{2}x = \sin \tfrac{1}{2}x,$$

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x.\ \cos \tfrac{1}{2}x = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}x.\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x;$$

da nun

$$\sec \tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\cos \tfrac{1}{2}x} = \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x)}:$$

so folgt

$$\sin x = \cos x.\ \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} x (1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x)}{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x},$$

oder

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}.$$

Es sey nun

$$\cos x = a = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}:$$

so giebt diese Gleichung entwickelt

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{1 - a}{1 + a}. \quad [1]$$

über das zu findende Resultat belehren. Die richtig geführte Rechnung muß zwar ganz gewiß durch ihre Zeichen völlig sichere Entscheidung geben, aber jene Zeichnung macht auf zufällige Fehler sogleich aufmerksam. [F]

*) Anmerkung. Ist der Winkel $= x$, so hat man

$$\sin 2x = 2 \sin x.\ \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x} = \frac{2 \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg}^2 x - 1},$$

und hieraus erhellt nun auch

$$\operatorname{tang} x = \frac{2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x}. \quad [F]$$

Es kann demnach jeder Cosinus durch die Tangente ausgedrückt werden; und so wurde z. B. in §. 9. für das rechtwinklige Dreieck gefunden

$$\cos a = \cos b . \cos c,$$

folglich

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos b . \cos c}{1 + \cos b . \cos c}.$$

In demselben §. im III. Falle ist

$$\cos a = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C;$$

also

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C}{1 + \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C} = \frac{-\cos (B + C)}{\cos (C - B)}.$$

Weil nun der Cosinus eines negativen Winkels unter 90° positiv ist: so sagt uns die letzte Gleichung, daß in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Summe der zwei schiefen Winkel immer größer als 90° ist, was wir auch schon anders woher wissen. Noch geht aus der letzten Gleichung ganz deutlich hervor: daß, wenn uns nur die Summe und die Differenz der zwei schiefen Winkel im rechtwinkligen Dreiecke bekannt ist, wir leicht die Hypotenuse finden können. Weil

$$\sin x = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} x . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{\sec^2 \tfrac{1}{2} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x}:$$

so folgt

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} x}. \quad [2]$$

II. Es ist $\sec x - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

$$= \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos \tfrac{1}{2} x}$$

$$= \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x,$$

weil

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x = \sin x, \quad 2 \sin \tfrac{1}{2} x = \frac{\sin x}{\cos \tfrac{1}{2} x},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x = \frac{\sec x - 1}{\operatorname{tang} x}; \quad [3]$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}(a-b)} \text{ *)}.$$

Wird nun $a = 90°$ angenommen, so ist $\sin a = 1$, und die vorstehende Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\frac{1+\sin b}{1-\sin b} = \frac{\tan(45° + \frac{1}{2}b)}{\tan(45° - \frac{1}{2}b)} = \tan^2(45° + \frac{1}{2}b); \quad [4]$$

und

$$\frac{1-\sin b}{1+\sin b} = \frac{\tan(45° - \frac{1}{2}b)}{\tan(45° + \frac{1}{2}b)} = \tan^2(45° - \frac{1}{2}b); \quad [5]$$

weil nun

$$\tan(45° + \tfrac{1}{2}b).\ \tan(45° - \tfrac{1}{2}b) = 1:$$

so ist

$$\frac{1}{\tan(45° - \frac{1}{2}b)} = \tan(45° + \tfrac{1}{2}b),$$

$\sin 45° = \cos 45°$,

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° = 1;$$

und also

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin b = 2\sin\tfrac{1}{2}b.\ \cos\tfrac{1}{2}b;\ \sin^2\tfrac{1}{2}b + \cos^2\tfrac{1}{2}b = 1:$$

so folgt

$$(1+\sin b)^{\frac{1}{2}} = \cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}b;$$

---

*) Anmerk. Ist der Sinus zweier Winkel oder Bogen α und β bekannt: so ist der Sinus der Summe $\alpha + \beta$, und der Sinus der Differenz $\alpha - \beta$:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\ \cos\beta \pm \cos\alpha.\ \sin\beta;$$

setzt man $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$,

so wird $\alpha = \frac{1}{2}(a+b)$ und $\beta = \frac{1}{2}(a-b)$;

und man erhält sofort, nach Addition und Subtraction der beiden Formeln, folgende:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b).\ \cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\ \sin\tfrac{1}{2}(a-b),$$

und hieraus durch Division

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \tan\tfrac{1}{2}(a+b).\ \cot\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}. \quad [F]$$

und auf ähnliche Art

$$(1-\sin b)^{\frac{1}{2}} = \cos\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}b,$$

$$\text{tang}(45^\circ + y) = \frac{1+\text{tang}\,y}{1-\text{tang}\,y}.$$

Wird angenommen, daß

$$\text{tang}\,y = \frac{a}{b},\quad 1+\text{tang}\,y = \frac{a+b}{b},\quad 1-\text{tang}\,y = \frac{b-a}{b};$$

so erhält man

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{1+\text{tang}\,y}{1-\text{tang}\,y} = \text{tang}(45^\circ + y). \quad [6]$$

III. Aus der Ueberlegung des Cosinus der Summe zweier Winkel oder Bogen $x+y$, und des Cosinus der Differenz $x-y$ erhellt folgende Gleichung:

$$2\sin x.\ \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y);$$

es ist demnach auch

$$2\sin A.\ \sin(C-B) = \cos(A+B-C) - \cos(A+C-B)$$
$$2\sin B.\ \sin(A-C) = \cos(B+C-A) - \cos(A+B-C)$$
$$2\sin C.\ \sin(B-A) = \cos(A+C-B) - \cos(B+C-A);$$

und folglich

$$\sin A.\sin(C-B) + \sin B.\sin(A-C) + \sin C.\sin(B-A) = 0. \quad [a]$$

Aus der Betrachtung des Sinus der Summe zweier Bogen oder Winkel $x+y$, und des Sinus der Differenz $x-y$ ergiebt sich, daß

$$2\cos x.\ \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y),$$

und also

$$2\cos A.\ \sin(C-B) = \sin(A+C-B) - \sin(A+B-C)$$
$$2\cos B.\ \sin(A-C) = \sin(A+B-C) - \sin(B+C-A)$$
$$2\cos C.\ \sin(B-A) = \sin(B+C-A) - \sin(A+C-B);$$

hieraus folgt

$$\cos A.\sin(C-B) + \cos B.\sin(A-C) + \cos C.\sin(B-A) = 0. \quad [b]$$

Die Gleichungen [a], [b], welche zwischen den drei Win-

keln des Dreiecks vorkommen, hat Gauß, aber ohne Beweis, aufgestellt *). Aus denselben erhält man

$$\tan A = \frac{\sin B.\ \sin(C-A) + \sin C.\ \sin(A-B)}{\cos B.\ \sin(C-A) + \cos C.\ \sin(A-B)}.\quad [c]$$

Denkt man sich die drei Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks, so kommen ebenfalls drei ähnliche Gleichungen zwischen diesen Seiten vor, nämlich:

$$\sin a.\ \sin(c-b) + \sin b.\ \sin(a-c) + \sin c.\ \sin(b-a) = 0,\quad [a']$$

$$\cos a.\ \sin(c-b) + \cos b.\ \sin(a-c) + \cos c.\ \sin(b-a) = 0,\quad [b']$$

$$\tan a = \frac{\sin b.\ \sin(c-a) + \sin c.\ \sin(a-b)}{\cos b.\ \sin(c-a) + \cos c.\ \sin(a-b)}.\quad [c']$$

Auflösung der trigonometrischen Gleichungen mittelst des unbestimmten Winkels (kąt nieoznaczony).

§. 14.

Sind zwei unbekannte Größen, p, Q, durch folgende zwei Gleichungen gegeben,

$$p \sin Q = A;\ p \cos Q = B:$$

so findet man

$$\tan Q = \frac{A}{B},\quad p = \frac{A}{\sin Q} = \frac{B}{\cos Q}.$$

Hat man aber zwei Gleichungen

$$p \sin(A-P) = a,\quad p \sin(B-P) = b,$$

wo P und p unbekannte Größen sind, welche man eben sucht: so können wir zwar durch die Entwickelung dieser Gleichungen, und durch die Division der einen durch die andere, nachstehenden Werth von P erhalten:

$$\tan P = \frac{a \sin B - b \sin A}{a \cos B - b \cos A} = \frac{b \sin A - a \sin B}{b \cos A - a \cos B};$$

*) Theoria motus corporum coelestium. p. 82.

aber eine weit allgemeinere Entwickelung ähnlicher Gleichungen erhalten wir durch [a] und [b] des vorhergehenden §. Denn man kann in den zwei vorgegebenen Gleichungen

$$p \sin(A - P) = a, \quad p \sin(B - P) = b$$

drei Winkel A, B, P betrachten, zwischen welchen eben solche Beziehungen als in [a], [b] Statt finden; wir wollen

$$\sin(A - P) = \frac{a}{p}, \quad \sin(B - P) = \frac{b}{p}$$

nehmen, und um alle möglichen Werthe, die p, P erhalten können, zu bekommen: so soll der unbestimmte Winkel H, indem wir H — A statt A, H — B statt B, H — P statt P setzen, eingeführt werden. Auf diese Art erscheinen die Gleichungen [a], [b] unter folgender Gestalt:

$$p \sin(B - A) \sin(H - P) = b \sin(H - A) - a \sin(H - B),$$
$$p \sin(B - A) \cos(H - P) = b \cos(H - A) - a \cos(H - B).$$

Durch die verschiedenen Annahmen für H entstehen verschiedene Werthe für P, p.

Erstens. Es sey H = A:

$$p \sin(B - A) \sin(A - P) = - a \sin(A - B) = a \sin(B - A),$$
$$p \sin(B - A) \cos(A - P) = b - a \cos(B - A),$$

oder

$$p \sin(A - P) = a, \quad p \cos(A - P) = \frac{b - a\cos(B - A)}{\sin(B - A)};$$

$$\tan(A - P) = \frac{a \sin(B - A)}{b - a \cos(B - A)}. \quad [7]$$

Zweitens. Es sey H = B:

$$p \sin(B - A) \sin(B - P) = b \sin(B - A),$$
$$p \sin(B - A) \cos(B - P) = b \cos(B - A) - a,$$

oder

$$p \sin(B - P) = b, \quad p \cos(B - P) = \frac{b \cos(B - A) - a}{\sin(B - A)};$$

$$\tan(B - P) = \frac{b \sin(B - A)}{b \cos(B - A) - a}. \quad [8]$$

Drittens. Es sey $H = \frac{1}{2}(A+B)$:

$$p \sin(B-A) \sin(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = (b+a) \sin\tfrac{1}{2}(B-A);$$

$$p \sin\left(\frac{A+B}{2} - P\right) = \frac{b+a}{2\cos\frac{1}{2}(B-A)}; \quad [9]$$

$$p \cos\left(\frac{A+B}{2} - P\right) = \frac{b-a}{2\sin\frac{1}{2}(B-A)}; \quad [10]$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{A+B}{2} - P\right) = \frac{b+a}{b-a} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$= \operatorname{tang}(45^\circ + y) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-A); \quad [11]$$

wenn man nämlich $\frac{a}{b} = \operatorname{tang} y$ aus §. 13. II. setzt.

Wollte man p durch a, b ausdrücken, ohne vorher P berechnet zu haben: so erhält man, da

$$p^2 \sin^2(A-P) + p^2 \cos^2(A-P) = p^2,$$

aus der ersten Annahme für H

$$p \sin(B-A) = \sqrt{[a^2 - 2ab\cos(B-A) + b^2]}.$$

Sollte p, P aus den zwei folgenden Gleichungen bestimmt werden,

$$p\cos(A-P) = a, \quad p\cos(B-P) = b:$$

so können die oben gegebenen Formeln ebenfalls gebraucht werden, nur müßte statt A, $90^\circ + A$; und statt B, $90^\circ + B$ gesetzt werden.

Diese neue Methode, trigonometrische Gleichungen aufzulösen, kann von sehr weitläuftigem Gebrauche bei analytischen Rechnungen seyn.

Zweiter Abschnitt.

Ausmessung des sphärischen Dreiecks; Gebrauch desselben bei der Ausmessung der Erde: Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit dem ebenen.

Der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.

§. 15.

Ist der Radius eines Kreises = 1, und wird das Verhältniß des halben Umfanges dieses Kreises zu seinem Radius durch π ausgedrückt: so ist

$$\pi = 3,\ 14159265358979323\ldots\ldots *)$$

l. $\pi = 0,\ 497149872694$; demnach wird der halbe Umfang eines Kreises, dessen Radius r ist, gleich $r\pi$ seyn, und mithin der ganze Umfang $= 2r\pi$.

Der Flächeninhalt eines größten Kreises, dessen Radius r, ist $2r\pi \cdot \frac{1}{2}r = r^2\pi$.

---

*) Anmerkung. Euler giebt π auf 127 Decimalstellen an. Euleri Introductio in Analysin Infinitorum (Michelsens Uebersetzung. I. Buch. 8. Capit. pag. 131). In den geometrischen Abhandlungen von Kästner, vom Jahre 1791. p. 182, stehen die Namen der Mathematiker, welche an dieser Zahl gearbeitet haben. [F]

Der Flächeninhalt der Kugel ist dem viermal genommenen Flächeninhalte des größten Kreises gleich, nämlich $4r^2\pi$.

Es ist uns also der Flächeninhalt der Kugel bekannt; nun ist aber das sphärische Dreieck ein Theil der Kugelfläche; wüßten wir demnach sein Verhältniß zur Oberfläche der Kugel: so könnten wir den Flächeninhalt dieses Dreiecks bestimmen. Es muß also zuvörderst das Verhältniß eines aus Bogen größter Kreise zusammengesetzten sphärischen Dreiecks zur Oberfläche der Kugel ermittelt werden.

In §. 10. wurde bemerkt, daß, wenn in einem sphärischen Dreiecke die drei Winkel rechte Winkel sind, ein solches Dreieck gleichwinklig und gleichseitig sey, und daß aus acht solchen Dreiecken die ganze Oberfläche der Kugel bestehe; es wird demnach der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks der achte Theil, oder $\frac{r^2\pi}{2}$ der Kugeloberfläche seyn. Verlängert man die Schenkel dieses Dreiecks, bis sie sich wechselseitig durchschneiden: so entsteht ein spitziger Streifen, aus zwei solchen Dreiecken zusammengesetzt, und der Flächeninhalt dieses Streifens wird $= r^2\pi$ seyn, das heißt: gleich dem Flächeninhalte eines größten Kreises, und folglich gleich dem vierten Theile der Kugeloberfläche. Dieser Streifen hat an jeder Spitze einen rechten Winkel, welcher, wie wir sehen, der Ueberschuß der drei Winkel des Dreiecks über 180° ist. Von nun an wollen wir diesen Streifen den Streifen des rechten Winkels oder von 90° nennen. Theilen wir diesen Streifen in kleinere spitzige Streifen: so werden die Schenkel von den kleineren spitzigen Streifen immer senkrecht auf der Basis stehen, denn die Spitze des Streifens ist der Pol dieser Basis, nach §. 10; es wird also jeder von diesen kleineren Streifen aus zwei gleichen Dreiecken zusammengesetzt seyn, und an jeder Spitze einen Winkel, gleich dem Ueberschusse der drei Winkel in jedem Dreiecke

über 180°, enthalten. Demnach wird sich der Flächeninhalt dieses Streifens zum Flächeninhalte des Streifens des rechten Winkels verhalten, wie der Winkel an der Spitze des ersteren Streifens zu 90°, oder wie der Winkel des Ueberschusses beim kleineren Streifen zu 90°. Nennt man den Winkel an der Spitze des kleineren Streifens P, den Flächeninhalt desselben x, den Flächeninhalt des Streifens von 90° aber S: so ist

$$90° : P = S : x, \quad x = \frac{P.S}{90°} = \frac{r^2 \pi P}{90°};$$

die Hälfte dieses Streifens, oder das rechtwinklige und gleichschenklige sphärische Dreieck $\frac{r^2 \pi . P}{2 . 90°}$.

Wir wollen die Hälfte des Streifens des rechten Winkels, d. h. das gleichseitige und gleichwinklige Dreieck, zur Einheit annehmen, und mit demselben den Flächeninhalt anderer Dreiecke vergleichen: so erhält man

$$\frac{r^2 \pi}{2} : \frac{r^2 \pi . P}{2 . 90°} = 90° : P.$$

Da nun aber in jedem sphärischen Dreiecke die Summe aller Winkel nach §. 4. größer als zwei rechte ist: so kann man sich das sphärische Dreieck ABC als aus zwei rechten Winkeln, und aus dem Ueberschusse zusammengesetzt vorstellen; der Ueberschuß ist nämlich $A + B + C - 180°$, oder mit andern Worten: man kann sich das sphärische Dreieck in die Hälfte eines spitzigen Streifens, mit dem Winkel $A + B + C - 180°$ an der Spitze, umgestaltet denken.

Jetzt soll bewiesen werden: daß der Flächeninhalt eines jeden sphärischen Dreiecks gleich sey dem Flächeninhalte eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks, dessen Seiten Kreisquadranten sind, und dessen Winkel an der Spitze gleich ist dem Ueberschusse der drei Winkel jenes Dreiecks über 180°.

Gehen zwei Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel, so schneiden sie sich auch gegenseitig, und bilden (Fig. 3. Tab. I.)

zwei einander gleiche spitzige Streifen ABCA′, ADEA′. Der Flächeninhalt eines jeden Streifens ist nach dem Vorhergehenden $=2A$, wenn nämlich A ein Winkel $BAC=BA'C$ ist.

Schneidet man die Kugel noch durch eine dritte Ebene BCDE ebenfalls durch den Mittelpunct: so werden auch die Streifen durchschnitten; von jedem Streifen liegt der eine Theil über dieser Ebene, oder auf der oberen Halbkugel; der andere Theil aber unter dieser Ebene, oder auf der unteren Halbkugel. Des einen Streifens zwei Theile mögen k′, k heißen; des andern h′, h: so hat man

$$2A=k+k'=h+h'.$$

Da sich aber zwei größte Kreise in einer Entfernung von 180° durchschneiden: so ist

$$AB+A'B=180^\circ,\ AB+AD=180^\circ;$$
$$AC+A'C=180^\circ,\ AC+AE=180^\circ;$$

und hieraus

$$AD=A'B,\ AE=A'C,$$

also

$$ADE=BA'C, \text{ oder } h=k'.$$

$$AD+DA'=180^\circ,\ AD+AB=180^\circ,$$
$$AE+EA'=180^\circ,\ AE+AC=180^\circ;$$

hieraus

$$AB=DA',\ AC=EA',$$

also

$$ABC=A'DE, \text{ oder } k=h';$$

und folglich $2A=k+h$,

das heißt: die Stücke zweier Streifen, welche sich vom Winkel A aus auf der Halbkugel ausbreiten, sind dem ganzen Streifen oder dem zweimal genommenen Winkel gleich.

Auf der Halbkugel FGHIKE (Fig. 4. Tab. I.) sey irgend ein Dreieck, z. B. ABC; man verlängere in beiden Richtungen die Seiten desselben bis 180°: so entstehen im Scheitelpuncte eines jeden Winkels zwei Theile von Streifen, deren Summe dem zweimal genommenen Winkel gleich ist, nämlich:

$$2A=FAG+KAI;\ 2C=HCI+FCE;\ 2B=EBK+GBH.$$

Diese Streifen werden die halbe Kugeloberfläche und den zweimaligen Flächeninhalt des Dreiecks ABC einnehmen; es wird also seyn

$$2A+2B+2C=\frac{1}{2}\text{ Kugeloberfläche }+2\triangle ABC.$$

Da nun aber die halbe Kugeloberfläche $=4.90^{0}=2.180^{0}$ ist: so erhält man den Flächeninhalt des Dreiecks

$$ABC=A+B+C-180^{0}.$$

Es verhält sich demnach der Flächeninhalt eines jeden sphärischen Dreiecks, zu dem als Einheit angenommenen Dreiecke, wie der Winkel seines Ueberschusses zu 90°; das heißt: es ist

$$\frac{r^{2}\pi.P}{2.90^{0}}=\frac{r^{2}\pi}{2.90^{0}}(A+B+C-180^{0}).$$

Ist nun noch ein anderes sphärisches Dreieck A′B′C′, und man nennt seinen Ueberschuß P′: so wird der Flächeninhalt desselben $\frac{r^{2}\pi P'}{2.90^{0}}$ seyn; es wird sich also der Flächeninhalt des ersten sphärischen Dreiecks zum Flächeninhalte des andern verhalten, wie P zu P′; und überhaupt wird sich der Flächeninhalt irgend eines sphärischen Dreiecks zu dem Flächeninhalte irgend eines anderen sphärischen Dreiecks verhalten, wie der Ueberschuß des erstern zum Ueberschuß des andern. Hieraus folgt nun das zwar kurze, aber für Anfänger zur gründlichen Einsicht ohne gehörige Erläuterung sehr schwierige Theorem: daß der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks dem Ueberschusse der Summe seiner drei Winkel über zwei Rechte gleich sey, wo der Flächeninhalt des gleichwinkligen und gleichseitigen Dreiecks zur Einheit angenommen wird.

Eben der kurze, aber zugleich dunkle Ausdruck ist von großer Unbequemlichkeit in der Geometrie; denn entweder wird dadurch der Anfänger zu falschen Begriffen verleitet, oder er stößt auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wer kann wohl einen

solchen Ausdruck verstehen: der Winkel sey dem Flächeninhalte, oder der Flächeninhalt dem Winkel gleich? Und dennoch bedient man sich dieser zwar kurzen, aber zugleich dunkeln und sehr gefährlichen Redensart bei der Ausmessung der Körper, Flächen, und bei der Bestimmung des Flächeninhalts. Es ist also rathsam, sich stets zu erinnern, daß in diesen so kurz ausgedrückten Sätzen immer die Rede vom Verhältnisse zweier allgemeiner Zahlen ist, von denen die eine aus der Vergleichung des Flächeninhalts mit dem Flächeninhalte, die andere hingegen aus der Vergleichung des Winkels mit dem Winkel folgt. Das eben hier auseinandergesetzte Theorem hat zuerst Albert Girard entdeckt *), und einen strengen Beweis lieferte Cavalleri **). In den Gebrauch wurde das Theorem von Johann Broski, Professor an der Krakauer Universität, eingeführt ***); nach ihm aber von Johann Wallis, dem Oxforder Mathematiker †). Einen schönen und gründlichen synthetischen Beweis dieses, aus Wallis Werken genommenen Satzes führt Legendre in seiner Geometrie. Noch besser erläutert diesen Satz Delambre ††). Hier hoffe ich den Beweis gründlich und einfach gegeben zu haben.

Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ABC ist also:

$$\frac{r^2 \pi}{180^\circ}(A+B+C-180^\circ)$$

$$=\frac{r^2 . 3,14159265}{180^\circ}(A+B+C-180^\circ). \quad [12]$$

---

*) Invention nouvelle en Algébre, Amsterdam 1629.

**) Directorium generale uranometricum. Bononiae 1632.

***) Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum. Dantisci 1652.

†) Opera mathemat. Oxon. 1693. Tom. II. pag. 875.

††) Abregé d'Astronomie pag. 118.

Beim Gebrauche dieser Formel ist zu merken: daß, wenn der Ueberschuß Grade, Minuten und Secunden enthält, diese Minuten und Secunden in Theilen des Grades ausgedrückt werden müssen. Es sey z. B. der Ueberschuß $1^\circ 23' 30'' = A + B + C - 180^\circ$; drückt man die Minuten und Secunden in Theilen des Grades aus: so ist $1^\circ 23' 30'' = 1^\circ, 3916$ *), und durch diesen Ausdruck muß $\frac{r^2 \pi}{180^\circ}$ multiplicirt werden. Enthält aber der Ueberschuß bloß Minuten und Secunden: so muß man die Secunden in Theilen von Minuten ausdrücken, durch $0,01666 = \frac{1}{60}$ vervielfachen, und dann erst durch den so erhaltenen Ausdruck $\frac{r^2 \pi}{180^\circ}$ multipliciren; wäre z. B. der Ueberschuß $6' 25'' = 6', 4166$ **): so bekäme man den Flächeninhalt des Dreiecks

$$= 6', 4166 . 0,01666 \frac{r^2 \pi}{180^\circ}.$$

Oder man verwandle 180° in Minuten $60 . 180^\circ = 10800'$: so erhält man den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks

$$= \frac{r^2 \pi}{10800} 6,4166.$$

Sollte endlich der Ueberschuß nur Secunden enthalten: so muß die Anzahl der Secunden erstens mit

$$0,0002777 = \frac{1}{3600} = \frac{1}{60 . 60},$$

und dann durch den so erhaltenen Ausdruck $\frac{r^2 \pi}{180^\circ}$ multiplicirt werden. Oder auch kürzer: man verwandle 180° in Secunden $10800' . 60 = 648000''$, und multiplicire durch die Anzahl der Secunden des Ueberschusses $\frac{r^2 \pi}{648000}$: so erhält man den Flä-

---

*) Anmerkung. Im Original steht hier $1^\circ 23' 30'' = 1^\circ, 3833$. [F]

**) Anmerkung. Im Original wird $6' 25'' = 6', 4016$ gesetzt. [F]

cheninhalt des sphärischen Dreiecks. Weil aber diese Formel sowohl bei der Ausmessung der Erde selbst, als auch bei der der verschiedenen Länder gebraucht wird, wo wir den Ueberschuß in Secunden allein erhalten, indem nämlich der Flächeninhalt des größten ausgemessenen Dreiecks immer noch als sehr klein in Beziehung auf die ganze Oberfläche der Erde betrachtet werden kann; so wollen wir dieser Formel noch folgende Gestalt geben:

$$\frac{r^2 . 3{,}14159265}{648000}(A+B+C-180^\circ).$$

$$l.\ \pi = 0{,}49714987.$$

$$l.\ 648000 = 5{,}81157500$$

$$4{,}68557487 = l.\sin 1''.$$

Kommt also der Ueberschuß schon wirklich in Secunden vor, oder verwandelt man ihn erst in Secunden: so ist der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks

$$r^2 \sin 1''(A+B+C-180^\circ). \quad [13]$$

Würde dieser Ausdruck bei der Ausmessung der Erde gebraucht: so wird r den Radius der Erde angeben. Nun ist aber nach den französischen Bezeichnungen der Quadrant eines Erdmeridians = 10,000000 Meter, folglich

$$\frac{\pi . r}{2} = 10{,}000000$$

$$r = \frac{20{,}000000}{\pi}$$

$$l.\ r = 6{,}8038802 \text{ in Metern;}$$

wird nun noch der Logarithmus des Verhältnisses des Meters zur französischen Ruthe (Toise), nämlich 9,7101800 (man sehe die vom Verfasser herausgegebene „Geografia." pag. 192. *)) zu dem l. r = 6,8038802 in Metern hinzu addirt: so erhält

---

*) Anmerkung. Der Herr Verfasser hat das oben genannte Werk der Königl. Warschauer Societät der Wissenschaften

man $l.r = 6{,}5140602$ in französischen Ruthen. Die französische Ruthe entspricht genau dreien lithauischen Ellen

$l.r^2 \sin 1'' = 7{,}7136952.$

Wird zu diesem Logarithmus hier noch der Logarithmus des Ueberschusses addirt: so bekommt man den Logarithmus des Flächeninhalts des sphärischen Dreiecks, auf der Kugel vom Radius r, in französischen Quadratruthen ausgedrückt. Findet man z. B. den Ueberschuß in einem terrestrischen Dreiecke 3″: so ist der Logarithmus des Flächeninhalts dieses Dreiecks =8,1908164; das heißt: der Flächeninhalt eines solchen sphärischen Dreiecks würde dem Flächeninhalte eines ebenen Dreiecks, dessen Höhe 11936,4, und dessen Basis 26000 fr. Ruthen wäre, gleich seyn.

Aus diesem Beispiele ist nun leicht zu entnehmen, wie groß auf der Erdkugel die Dreiecke seyn müssen, wenn sich in denselben der Ueberschuß in Bogensecunden zeigen soll. Selbst mit guten Instrumenten und bei sorgfältig gemachten Beobachtungen kann oft im Messen der Winkel ein Fehler von mehreren Secunden begangen werden, und dieser hat bedeutenden Einfluß auf den Flächeninhalt des Dreiecks. Auch noch in einer andern Hinsicht ist es gut, den Ueberschuß zu kennen; denn soll ein großer Raum auf der Erde ausgemessen werden: so kann man denselben nicht als in einer Ebene liegend betrachten. Will man dennoch mit den sphärischen Dreiecken, vermittelst des Legendreschen Satzes, den wir weiter unten anführen wollen, eben so wie mit dem ebenen verfahren: so müs-

---

übergeben, und 1818 ist bereits die dritte Auflage von diesem Werke erschienen. Der vollständige Titel ist:

„Geografia, czyli opisanie matematyczne i fizyczne ziemi; przez Jana Sniadeckiego; ztablica wyrazaiącą potozenie geograficzne znakomitszych mieysc naziemi: w Wilnie 8vo. 1818.“ [F]

sen wir durchaus den Ueberschuß mit Genauigkeit angeben können; es wird demnach die Kenntniß des Ueberschusses zur genauen Ausmessung der Erde, oder irgend eines Landes auf derselben, unumgänglich nöthig seyn. Hier bietet sich uns eine sehr wichtige Frage dar: Wie kann, aus zwei gegebenen Seiten, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, in einem sphärischen Dreiecke der Ueberschuß desselben gefunden werden?

Die trigonometrischen Linien durch die Bogen ausgedrückt, und der doppelte Werth dieser Bogen.

§. 16.

Ehe wir zur Auflösung dieser Aufgabe schreiten, wird es gut seyn, sich zu erinnern, daß *)

$$\sin v = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^3}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^8}{2.3.4.\ldots.9} - \&$$

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6} + \frac{v^8}{2.3.\ldots.8} - \ldots \pm \&$$

Die erste Gleichung durch die zweite, mit gehöriger Beobachtung der Zeichen und der Brüche von verschiedenen Nennern, dividirt, giebt

$$\text{tang}\, v = v + \frac{v^3}{3} + \frac{2.v^5}{3.5} + \frac{17.v^7}{3.3.5.7} + \frac{62.v^9}{3.3.5.7.9} + \frac{1382.v^{11}}{3.3.5.5.7.9\,{}_{11}} + \&$$

und auf eine ähnliche Art die zweite Gleichung durch die erste dividirt:

$$\text{cotang}\, v = \frac{1}{v} - \frac{v}{3} - \frac{v^3}{3.3.5} - \frac{2.v^5}{3.3.3.5.7} - \frac{v^7}{3.3.3.5.5.7} - \&$$

Bei der Ausmessung der Erde durch Dreiecke, wo wir uns mit Bogen, welche sehr kleine Winkel am Mittelpuncte der Er-

---

*) Anmerkung. Man sehe „Vorbereitungen zur höheren Analysis," vom Herrn Professor Brandes. III. Abschnitt. pag. 152 und pag. 155.

de messen, beschäftigen, werden diese Gleichungen sehr nützlich. Durch die practischen Messungen erhalten wir das Maaß dieser Bogen in gerader Linie (rectificirt), das heißt: in Theilen des Erdradius ausgedrückt. Diese Bogen haben einen doppelten Werth: entweder können dieselben in Graden, Minuten, und Secunden des Kreises, oder in Theilen des Radius der Kugel, also z. B. in französischen Ruthen, ausgedrückt werden. Bei diesen und andern ähnlichen Untersuchungen müssen wir immerwährend von einem Werthe zu dem andern durch eine Methode, mit welcher wir uns noch näher bekannt machen wollen, übergehen. Diese Methode ist von dem doppelten Werthe, den man dem Radius der Kugel beilegen kann, abhängig: derselbe kann entweder als gerade Linie, oder auch als in den Bogen seines Kreises umgebogene krumme Linie betrachtet werden. In diesem zweiten Falle weiß man, daß der Radius $= 57^\circ\ 17'\ 44''$, $8 = 206264''$, 8; $\mathrm{l}.\ 206264''$, $8 = 5{,}3144251 = \mathrm{l}.\ (r)$.

Es soll r immer den Radius als gerade Linie; (r) aber den Radius als in den Bogen seines Kreises umgebogene krumme Linie, oder in Secunden des Kreises ausgedrückt, bezeichnen. Alle trigonometrischen Linien sind gerade Linien in Theilen des Radius, der ebenfalls als gerade Linie angenommen wird, ausgedrückt; sollen sie demnach umgebogen, oder in Theilen des Kreisumfanges, d. h. in Secunden, angegeben werden: so muß man sie mit (r) multipliciren, und so ist $\sin b.\,(r) =$ dem Bogen des Kreises in Secunden.

Sind aber die trigonometrischen Linien durch die Bogen ausgedrückt, wie im Vorhergehenden $\sin v$; $\tan v$, etc.: so müssen die Bogen in eine gerade Linie ausgedehnt werden, um sie in demselben Maaße, als die trigonometrische Linie, d. h. in Theilen des Radius, den wir als gerade Linie annehmen, zu haben; es müssen also die Bogen durch (r) dividirt werden, dann ist $\sin b.\,(r) = v$: so folgt $\sin b = \frac{v}{(r)}$.

Aus den trigonometrischen Tafeln weiß man: daß

$l.\,206264{,}8 = l.\,(r) = l.\,\frac{1}{\sin 1''}$, und $l.\,\frac{1}{(r)} = l.\,\sin 1''$ ist; will man demnach irgend eine gerade Linie in Theilen des Kreisumfanges, z. B. in Secunden, ausdrücken: so muß dieselbe mit $\frac{1}{\sin 1''}$ multiplicirt werden, und man erhält

$$\frac{\sin b}{\sin 1''} = v.$$

Sollen hingegen die Bogen in Theilen der geraden Linie angegeben werden: so muß man mit $\sin 1''$ multipliciren, und so $v \sin 1'' = \sin b.$

Es ist aber: $l.\,2 + l.\,\sin 1'' = l.\,2 \sin 1'' = l.\,\sin 2''$; $l.\,3 + l.\,\sin 1'' = l.\,3 \sin 1'' = l.\,\sin 3''$; u. s. w. Aus diesem wird nun Jeder leicht abnehmen, daß statt $2 \sin 1''$, $3 \sin 1''$, $4 \sin 1''$ u. s. w., gesetzt werden kann $\sin 2''$, $\sin 3''$, $\sin 4''$ u. s. w.

Die auf der Oberfläche der Erde gemessenen Seiten eines Dreiecks sind Bogen von sehr kleinen Winkeln am Mittelpuncte der Erde; will man nun diese Winkel durch jene Seiten ausdrücken: so müssen die Seiten durch den Radius dividirt, oder mit $\sin 1''$ multiplicirt werden. Nun hat aber die Erde nicht allenthalben einen und denselben Radius; sollen also diese Bogen auf den Radius, der einem gewissen Lande oder einer gewissen geographischen Breite zukäme, bezogen werden: so muß man aus der Gestalt der Erde erst das Maaß eines Meridiangrades abzuleiten suchen, durch das abgeleitete Maaß einen Grad oder 3600″ dividiren, und durch das so erhaltene Verhältniß den Winkel am Mittelpuncte der Erde, den die gemessene Seite des Dreiecks begrenzt, multipliciren. Bei der Ausmessung von Lithauen würde man die mittlere geographische Breite zwischen Riga und Grodno 55° 18′ 45″, die Abplattung der Erde zu $\frac{1}{310}$, die Länge eines Meridiangrades aber

zu 57104,5 französischen Ruthen (Toisen) *) nehmen müssen. Es wird demnach der Winkel am Mittelpuncte der Erde durch die Seite a des Dreiecks ausgedrückt seyn, $\frac{3600''}{57104,5}$ a. sin 1''.

Der Ueberschuß durch Seiten und Winkel ausgedrückt.

§. 17.

Wir wenden uns nun zu der am Ende des 15. §. angedeuteten Aufgabe.

$A + B + C - 180^\circ = P$, $\frac{1}{2}P = -[90^\circ - \frac{1}{2}(A + B + C)]$: folglich

$$\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}P = -\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B + C)$$
$$= -\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}A + \text{tang}\,\frac{1}{2}(B + C)}{1 - \text{tang}\,\frac{1}{2}A.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(B + C)};$$

und in diese Gleichung den zugehörigen Werth für $\text{tang}\,\frac{1}{2}(B + C)$ nach den Nepper'schen Analogien §. 7. gesetzt: so erhält man

$$\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}P = -\frac{\cos\frac{1}{2}(b + c)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}A + \text{cotg}\,\frac{1}{2}A.\,\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c) - \cos\frac{1}{2}(b - c)};$$

werden die Zeichen im Nenner geändert, um die andere Seite der Gleichung positiv zu erhalten,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A},\ \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}$$

gesetzt, und die Brüche auf einerlei Benennung gebracht: so ist

$$\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}P = \frac{\cos\frac{1}{2}(b + c)\sin^2\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}(b - c)\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A.\,\cos\frac{1}{2}A\,[\cos\frac{1}{2}(b - c) - \cos\frac{1}{2}(b + c)]}.$$

Weil nun $\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sin A$, $\cos\frac{1}{2}(b-c) - \cos\frac{1}{2}(b+c) = 2\sin\frac{1}{2}b.\,\sin\frac{1}{2}c$: so verwandelt sich der Nenner dieses Bru-

---

*) Anmerkung. Die Resultate der vorzüglichsten gemessenen Breitengrade für die Gestalt und Größe der Erde kann der Leser in Littrow's theoretischer und pract. Astronomie. Wien 1821. Erster Theil. pag. 331. nachsehen, und in Gehler's phys. Wörterbuche. Art. Erde. [F]

ches in $\sin\frac{1}{2}b.\ \sin\frac{1}{2}c.\ \sin A$. Den Zähler können wir aber, wenn die Summen und die Differenzen der Bogen durch die einfachen Bogen ausgedrückt werden, auch so darstellen: $\cos\frac{1}{2}b.\ \cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b.\ \sin\frac{1}{2}c\,(\cos^2\frac{1}{2}A - \sin^2\frac{1}{2}A)$; wird jetzt noch $\cos^2\frac{1}{2}A - \sin^2\frac{1}{2}A = \cos A$ gesetzt, und die ganze Gleichung durch $\cos\frac{1}{2}b.\ \cos\frac{1}{2}c$ dividirt: so hat man sofort

$$\cotg\tfrac{1}{2}P = \frac{1 + \tang\frac{1}{2}b.\ \tang\frac{1}{2}c.\ \cos A}{\tang\frac{1}{2}b.\ \tang\frac{1}{2}c.\ \sin A};$$

oder auch

$$\tang\tfrac{1}{2}P = \frac{\tang\frac{1}{2}b.\ \tang\frac{1}{2}c.\ \sin A}{1 + \tang\frac{1}{2}b.\ \tang\frac{1}{2}c.\ \cos A}; \quad [L]$$

in dieser Gleichung sind b, c die zwei Seiten des Dreiecks, und A ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel; durch diese Stücke haben wir den Ueberschuß P ausgedrückt, und mithin die Aufgabe gelös't. Delambre lös't in seinem schönen Werke *) die nämliche Aufgabe, aber auf eine andere Art, indem er den Ueberschuß P durch zwei Seiten, und durch die zwei diesen Seiten anliegenden Winkel auszudrücken sucht. Auch hat derselbe vermittelst dieser Gleichungen eine Tafel berechnet, in welcher man aus den gegebenen zwei Seiten und zwei Winkeln sogleich den Ueberschuß eines Dreiecks finden kann. Da diese Tafel bei der Ausmessung eines Landes von großem Nutzen wird: so sollen hier auch diese Gleichungen noch näher betrachtet werden.

Das sphärische Dreieck ABC werde durch den, aus dem Winkelpuncte A auf die gegenüberstehende Seite a gezogenen senkrechten Bogen in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Durch dieß wird der Winkel A in die zwei Winkel A′, A″ getheilt; so daß $A = A' + A''$, und die Seiten b, c Hypotenusen seyn werden. Es entstehen demnach zwei Dreiecke A′CD, A″BD, D ist der Punct auf der Seite a, in welchem der senkrechte Bogen

---

*) Base du système métrique, Tom. I. pag. 146.

diese Seite trifft. Hier kommt es nun darauf an, Ausdrücke für die Winkel A′, C, und für die Winkel A″, B zu finden; denn aus der Summe dieser Winkel erhält man den Ueberschuß des Dreiecks ABC.

Nach der in §. 9., Gleichung [c] angeführten Eigenschaft des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ist

$$\cot A' = \cos b.\ \tan C = \tan(90^\circ - A'),$$

$$\tan C - \tan(90^\circ - A') = \tan C(1 - \cos b) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}b.\tan C;$$

und im anderen rechtwinkligen Dreiecke

$$\cot A'' = \cos c.\ \tan B = \tan(90^\circ - A''),$$

$$\tan B - \tan(90^\circ - A'') = \tan B(1 - \cos c) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}c.\tan B.$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} - \frac{\cos A'}{\sin A'} = \frac{\sin A'.\ \sin C - \cos A'.\ \cos C}{\sin A'.\ \cos C},$$

$$= \frac{-\cos(A' + C)}{\sin A'.\ \cos C},$$

$$= \frac{\sin -(90^\circ - [A' + C])}{\sin A'.\ \cos C},$$

$$= \frac{\sin(A' + C - 90^\circ)}{\sin A'.\ \cos C};$$

woraus denn folgt

$$\sin(A' + C - 90^\circ) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}b.\ \sin C.\ \sin A',$$

und auf eine ähnliche Weise

$$\sin(A'' + B - 90^\circ) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}c.\ \sin B.\ \sin A''.$$

Die zweite Seite der Gleichung ist durchaus positiv, mithin wird es auch die erste seyn müssen; und folglich ist in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Summe der zwei schiefen Winkel immer größer als 90°, und zwar größer um den Bogen, dessen Sinus $= 2\sin^2 \frac{1}{2}b.\ \sin C.\ \sin A'$. Diesen Bogen wollen wir mit x bezeichnen: so ist

$$x = A' + C - 90^\circ;\ A' = x + 90^\circ - C = 90^\circ - (C - x):$$

$$\sin A' = \cos(C - x)$$

$$\sin x = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}b.\ \sin C.\ \cos(C - x)$$

$$= \sin^2 \tfrac{1}{2}b.\ \sin 2C.\ \cos x + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}b.\ \sin^2 C.\ \sin x.$$

Wird die ganze Gleichung mit $\cos x$ multiplicirt, und $2\sin^2 C = 1 - \cos 2C$ gesetzt: so erhält man

$$\tang x = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}b.\ \sin 2C}{\cos^2 \frac{1}{2}b + \sin^2 \frac{1}{2}b.\ \cos 2C}$$

$$= \frac{\tang^2 \frac{1}{2}b.\ \sin 2C}{1 + \tang^2 \frac{1}{2}b.\ \cos 2C}. \quad [L']$$

Verfährt man auf eine ähnliche Weise mit der zweiten Gleichung, indem $y = A'' + B - 90^\circ$ gesetzt wird: so folgt

$$\tang y = \frac{\tang^2 \frac{1}{2}c.\ \sin 2B}{1 + \tang^2 \frac{1}{2}c.\ \cos 2B}.$$

Da nun aber

$$x = A' + C - 90^\circ;\ y = A'' + B - 90^\circ:$$

so erhellt

$$x + y = A' + A'' + B + C - 180^\circ = A + B + C - 180^\circ.$$

So sind wir denn auf die Delambre'schen Gleichungen, und auf eine zweite Methode den Ueberschuß darzustellen gekommen. Bedenken wir jedoch, daß bei practischen Messungen die Winkel des Ueberschusses sehr klein sind; daß die trigonometrischen Tafeln nur eine Annäherung zur Wahrheit geben, und daß die sieben Decimalstellen, in denen sie gewöhnlich berechnet vorkommen, und gebraucht werden, nicht mit hinlänglicher Genauigkeit die Differenzen sehr kleiner Winkel angeben: so ist klar, daß die Gleichungen [L], [L'] uns, bei practischen Messungen, nicht viel nützen würden, wenn wir nicht zugleich im Stande wären, die trigonometrischen Linien durch Bogen in stark convergirenden Reihen auszudrücken, wo schon einige von den ersten Gliedern eine bedeutende Annäherung zur Wahrheit geben könnten. Es entsteht demnach hier folgende Aufgabe: wenn eine trigonometrische Linie durch die Function einer anderen trigonometrischen Linie gegeben ist: so soll ihr Bogen durch eine convergirende Reihe dargestellt werden. Hat man z. B. $\tang x = m \sin y$: so soll x durch die Function m und durch die des Winkels y ausgedrückt werden.

Der Bogen durch die trigonometrischen Linien dargestellt.

§. 18.

Die eben erwähnte Aufgabe hat Lagrange gelöst *). Der Beweis ist vermittelst Functionen mit imaginären Exponenten geführt; denn bekanntlich **) lassen sich die trigonometrischen Linien durch Functionen mit imaginären Exponenten ausdrücken. Woraus wir denn auch zugleich ersehen, daß die imaginären Größen eigentlich den characteristischen Ausdruck der analytischen Sprache darstellen, so oft wir von algebraischen Größen zu transcendenten übergehen wollen. Und folglich, so wie nun in dieser Sprache $\pm$ nicht immer ein Zusammenzählen oder Abziehen andeutet: so wird auch $a\sqrt{-1}$ nicht immer etwas Unmögliches angeben.

Im natürlichen Logarithmensysteme ***) ist

$$l.(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{6}z^6 + \text{etc.};$$

man setze $z = \dfrac{1}{z}$,

$$l.\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{5z^5} - \text{etc.},$$

$$l.(1+z) - l.\left(1+\frac{1}{z}\right) = l.\frac{z+z^2}{1+z} = l.z;$$

also

$$l.z = z - z^{-1} - \tfrac{1}{2}\left(z^2 - z^{-2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(z^3 - z^{-3}\right) - \text{etc.}$$

---

*) Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des series. Man sehe hierüber die Abhandlungen der Berliner Academie vom Jahre 1776. pag. 214.

**) Anmerkung. Der Leser kann hiermit das schon oben angeführte Werk: Vorbereitungen zur höheren Analysis von Brandes. IV. Abtheilung, vergleichen. [F]

***) Anmerkung. M. s. Vorbereitungen zur höheren Analysis von Brandes. II. Abschnitt. pag. 143.

Es sey

$$z = e^{v\sqrt{-1}} \text{ also } l.z = v\sqrt{-1};$$

und folglich

$$v\sqrt{-1} = e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}\left(e^{2v\sqrt{-1}} - e^{-2v\sqrt{-1}}\right) + \tfrac{1}{3}\left(e^{3v\sqrt{-1}} - e^{-3v\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.}$$

Wird die ganze Gleichung mit $2\sqrt{-1}$ dividirt, und wenn man für die Functionen mit den imaginären Exponenten die ihnen zukommenden Werthe setzt: so erhellt folgende, bei höheren Rechnungen sehr gebräuchliche Reihe:

$$\tfrac{1}{2}v = \sin v - \tfrac{1}{2}\sin 2v + \tfrac{1}{3}\sin 3v - \tfrac{1}{4}\sin 4v + \text{etc.}$$

Das eben angeführte Beispiel, und die hier betrachtete Aufgabe kann noch durch die Differential- und Integralrechnung sehr leicht gelös't werden; denn das Differential einer jeden trigonometrischen Linie besteht aus dem Differential des Bogens, und aus der Function einer zweiten trigonometrischen Linie *). Und eben auf diesem Wege kam Lagrange zuerst auf einen Satz, der ihn zur Auflösung der betrachteten Aufgabe brachte. Es ist hier nicht der Ort, diese zwei Methoden auseinander zu setzen; denn die hier vorkommenden Fälle lassen sich auch folgendermaaßen übersehen.

---

*) Anmerkung. Zur besseren Uebersicht bei den folgenden Anwendungen setze ich die Differentialausdrücke für die Kreisfunctionen her:

Es sey der Bogen φ: so ist

I. $d\sin\varphi = d\varphi.\ \cos\varphi.$ IV. $d\,\mathrm{cotg}\,\varphi = -\dfrac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$

II. $d\cos\varphi = -d\varphi.\ \sin\varphi.$ V. $d\sec\varphi = \dfrac{d\varphi.\ \mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi}.$

III. $d\,\mathrm{tang}\,\varphi = \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$ VI. $d\,\mathrm{cosec}\,\varphi = -\dfrac{d\varphi.\ \mathrm{cotg}\,\varphi}{\sin\varphi}.$

Sowohl die Gleichung [L], als auch die Gleichung [L′] können wie folgt ausgedrückt werden:

$$\tang x = \frac{m.\sin y}{1 + m.\cos y},$$

indem man in [L] $m = \tang \frac{1}{2} b.\ \tang \frac{1}{2} c$, $y = A$; in [L′] aber $m = \tang^2 \frac{1}{2} b$, $y = 2C$ setzt. Es soll nun x durch die Function m, y in einer Reihe dargestellt werden. Es ist bekanntlich

$$x = \tang x - \frac{1}{3} \tang^3 x + \frac{1}{5} \tang^5 x - \frac{1}{7} \tang^7 x + \text{etc. } ^{*)}.$$

Wird die Division beim Bruche $\frac{m \sin y}{1 + m \cos y}$ ausgeführt: so hat man

$$\tang x = m \sin y - m^2. \sin y.\cos y$$
$$+ m^3 \sin y.\cos^2 y - m^4 \sin y.\cos^3 y + m^5 \sin y.\cos^4 y -$$
$$-\frac{1}{3}\tang^3 x = -\frac{1}{3} m^3 \sin^3 y + m^4 \sin^3 y.\cos y - m^5 \sin^3 y.\cos^2 y +$$
$$\frac{1}{5}\tang^5 x = \qquad + \frac{1}{5} m^5 \sin^5 y - \text{etc.}$$

Nun ist m ein Bruch, oder eine sehr kleine Zahl, sin y durchaus ein Bruch; folglich wird sich diese Reihe schon in den vier ersten Gliedern bedeutend dem wahren Werthe nähern, und man darf nicht über m^4 in dieser Reihe hinausgehen. Es ist aber

$$\sin y.\cos y = \frac{1}{2} \sin 2y;$$
$$3 \sin y.\cos^2 y - \sin^3 y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y = \sin 3y,$$
$$\sin^3 y.\cos y - \sin y.\cos^3 y = \sin y.\cos y (\sin^2 y - \cos^2 y)$$
$$= -\sin y.\cos y (\cos^2 y - \sin^2 y)$$
$$= -\frac{1}{2} \sin 2y.\cos 2y$$
$$= -\frac{1}{4} \sin 4y.$$
etc.;

*) Anmerkung. Diese Reihe stellt den Bogen x durch eine Tangente dar. Man erhält diese Reihe wie folgt:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{1 + \tang x \sqrt{-1}}{1 - \tang x \sqrt{-1}}$$ (Vorbereitungen von Brandes. pag. 161.)

nun ist aber

$$l.\frac{1+z}{1-z} = 2\left[z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \text{etc.}\right]$$ (Vorb. v. Brandes. pag. 147.)

wird also $z = \tang x \sqrt{-1}$: so erhellt obige Reihe

$$x = \tang x - \frac{1}{3} \tang^3 x + \frac{1}{5} \tang^5 x - \text{etc.} \qquad [F]$$

und also

$$x = m \sin y - \tfrac{1}{2} m^2 \sin 2y + \tfrac{1}{3} m^3 \sin 3y - \tfrac{1}{4} m^4 \sin 4y + \text{etc.};$$

und um x in Bogensecunden zu haben, muß die ganze Reihe noch durch sin 1″ dividirt werden, das heißt:

$$x = \frac{m \sin y}{\sin 1''} - \frac{m^2 \sin 2y}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3y}{\sin 3''} - \frac{m^4 \sin 4y}{\sin 4''} + \text{etc.}$$

Aus der vorstehenden Reihe läßt sich auch x bestimmen, wenn $\tan x = \frac{m \cos n}{1 + m \sin n}$ ist; denn

wird $y = 90^\circ - u$ gesetzt: so ist $\sin y = \cos u$;

$2y = 180^\circ - 2u$; $\sin 2y = \sin 2u$;

$3y = 270^\circ - 3u$; $\sin 3y = -\cos 3u$;

$4y = 360^\circ - 4u$; $\sin 4y = -\sin 4u$;

und man erhält für $\tan x = \frac{m \cos u}{1 + m \sin u}$ folgende Reihe:

$$x = \frac{m \cos u}{\sin 1''} - \frac{m^2 \sin 2u}{\sin 2''} - \frac{m^3 \cos^3 u}{\sin 3''} + \frac{m^4 \sin 4u}{\sin 4''} \text{ etc.}$$

in dieser Reihe folgt alle zwei Glieder eine Veränderung der Zeichen, was leicht zu übersehen ist.

Wäre hingegen die Gleichung $\tan x = \frac{m \sin y}{1 - m \cos y}$ gegeben: so erhält man nach einer ähnlichen Division wie oben, und nach der Zusammenstellung der Werthe für $\frac{1}{3} \tan^3 x$, $\frac{1}{5} \tan^5 x$; etc., den Bogen x in folgender Reihe:

$$x = \frac{m \sin y}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2y}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3y}{\sin 3''} + \frac{m^4 \sin 4y}{\sin 4''} + \text{etc.};$$

hieraus würde man auch den Bogen x finden, wenn $\tan x = \frac{m \cos u}{1 - m \sin u}$ gegeben wäre; denn setzt man

$y = 90^\circ - u$, so ist $\sin y = \cos u$;

$2y = 180^\circ - 2u$, $\sin 2y = \sin 2u$;

$3y = 270^\circ - 3u$, $\sin 3y = -\cos 3u$;

$4y = 360^\circ - 4u$, $\sin 4y = -\sin 4u$;

etc. etc.

$$x = \frac{m \cos u}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2u}{\sin 2''} - \frac{m^3 \cos 3u}{\sin 3''} - \frac{m^4 \sin 4u}{\sin 4''} + \text{etc.}$$

Wenden wir das Vorstehende auf die Gleichungen [L], [L′] an, das heißt: wird in [L] $m = \tan \frac{1}{2}b . \tan \frac{1}{2}c$, $y = A$ gesetzt: so erhält man

$$\tfrac{1}{2}P = \frac{\tan \frac{1}{2}b . \tan \frac{1}{2}c}{\sin 1''} \sin A - \frac{\tan^2 \frac{1}{2}b . \tan^2 \frac{1}{2}c}{\sin 2''} \sin 2A + \frac{\tan^3 \frac{1}{2}b . \tan^3 \frac{1}{2}c}{\sin 3''} \sin 3A - \text{etc.}; \quad [14]$$

und folglich auch den Ueberschuß P in Secunden.

Was die Gleichungen [L′] betrifft: so setze man in der ersten $m = \tan^2 \frac{1}{2}b$, $y = 2C$; in der zweiten für y, $m = \tan^2 \frac{1}{2}c$, $y = 2B$.

$$x = \frac{\tan^2 \frac{1}{2}b}{\sin 1''} \sin 2C - \frac{\tan^4 \frac{1}{2}b}{\sin 2''} \sin 4C + \frac{\tan^6 \frac{1}{2}b}{\sin 3''} \sin 6C - \text{etc.}$$
$$y = \frac{\tan^2 \frac{1}{2}c}{\sin 1''} \sin 2B - \frac{\tan^4 \frac{1}{2}c}{\sin 2''} \sin 4B + \frac{\tan^6 \frac{1}{2}c}{\sin 3''} \sin 6B - \text{etc.} \quad [15]$$

Die beiden letzten Reihen zu einander addirt, geben den Ueberschuß des Dreiecks; denn es ist

$$x = A' + C - 90^\circ, \quad y = A'' + B - 90^\circ;$$

und folglich

$$x + y = A + B + C - 180^\circ.$$

Mit Hülfe dieser Reihen hat nun Delambre eine Tafel berechnet, in der man sogleich aus den gegebenen zwei Seiten, und aus den zwei diesen Seiten gegenüberstehenden Winkeln den Ueberschuß ohne weitere Rechnung finden kann. Diese Tafel ist für Frankreich berechnet, wo ein Meridiangrad = 57020 fr. Ruthen ist. Folgendes ist jedoch bei der Delambre'schen Rechnung *) zu merken: nachdem er die Coefficienten von sin 2B, sin 2C durch Zahlen ausgedrückt hat, und indem er die Reihe

---

*) Base du système métrique, Tome I. pag. 147.

von Ziffern in einem so kleinen Bruche zu vermindern sucht: so multiplicirt er denselben mit 10.000, und dividirt zuletzt das erhaltene Resultat wiederum mit 10.000; oder mit anderen Worten: er zieht zuletzt von der Karakteristik 4 ab, und erhält auf diese Art die Secunden für die Tafel. Auch braucht er nur das erste Glied aus jeder Reihe für seine Tafel als schon sehr hinreichend.

Wir wollen nun Delambre's Beispiel auf unsere Art berechnen. Weil sin 1″ = tang 1″: so können diese Ausdrücke mit einander vertauscht werden.

$$\frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2} b}{\sin 1''} = \left\{\frac{3600 \frac{1}{2} b}{57020}\right\}^2 \sin 1'' = \left\{\frac{9.b}{285,1}\right\}^2 \sin 1''$$

$$\frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2} c}{\sin 1''} = \left\{\frac{9.c}{285,1}\right\}^2 \sin 1'';$$

folglich

$$A + B + C - 180^\circ = \left\{\frac{9.b}{285,1}\right\}^2 \sin 1''.\ \sin 2C + \left\{\frac{9.c}{285,1}\right\}^2 \sin 1''.\ \sin 2B;$$

bei Delambre ist

$$A + B + C - 180^\circ = 0'',00004831.\ b^2 \sin 2C + 0'',00004831.\ c^2 \sin 2B.$$

Es sey b = 18.000 franz. Ruthen (Toisen), der Winkel C = 30°, c = 20.000 fr. Ruthen, B = 40°: so erhält man

l. 9 =	0,9542425	. . . .	0,9542425
Comp. l. 285,1 =	7,5450028	. . . .	7,5450028
l. b =	4,2552725	. . . . . . l. c =	4,3010300
	2,7545178		2,8002753
	2		2
	5,5090356	. . . .	5,6005506
l. sin 1″ =	4,6855749	. . . l. sin 1″ =	4,6855749
l. sin 2 C =	9,9375306	. . . l. sin 2 B =	9,9933515
	0,1321411 1″,355		0,2794770 1″,903

und hieraus erhellt der Ueberschuß 3″,25, was vollkommen mit der Tafel übereinstimmt. Rechnen wir jetzt nach **Delambre**: so ist

$$\begin{array}{llll} \text{l. } 0'',00004831 = 5{,}6840370 & \ldots\ldots\ldots & & 5{,}6840370 \\ \text{l. } b^2 = 8{,}5105450 & \ldots & \text{l. } c^2 = & 8{,}6020600 \\ \text{l. } \sin 2C = 9{,}9375306 & & \text{l. } \sin 2B = & 9{,}9933515 \\ \overline{4{,}1321126 - 4}\ 1'',35. & & & \overline{4{,}2794485 - 4}\ 1'',90. \end{array}$$

Wollte man das eben hier berechnete Beispiel auf Lithauen anwenden: so müßte der Grad des Meridians zu 57104,5 fr. Ruthen angenommen werden, und folglich

$$A + B + C - 180^\circ = \left\{\frac{3600\,\frac{1}{2}b}{57104{,}5}\right\}^2 \sin 1''.\ \sin 2C$$
$$+ \left\{\frac{3600\,\frac{1}{2}c}{57104{,}5}\right\}^2 \sin 1''.\ \sin 2B;$$

wird die angezeigte Operation ausgeführt: so erhält man für das eine Glied 1″,352, für das andere 1″,897; und mithin den Ueberschuß 3″,249. Hieraus erhellt nun, daß die für Frankreich berechnete Tafel auch ohne merklichen Fehler bei der Ausmessung von Lithauen gebraucht werden könnte. Führt man jedoch die Rechnung genau: so wird der constante Logarithmus für Lithauen $\frac{1800}{57104{,}5} = 8{,}4986022$ seyn, bei dessen Gebrauch aber die ganzen Seiten des Dreiecks genommen werden müßten.

Bei dieser Rechnung muß auch noch gemerkt werden, daß aus der Reihe $\tan v = v + \frac{1}{3}v^3$ u. s. w. §. 16. nur das erste Glied als schon hinlänglich gebraucht wird; denn die höheren Potenzen werden so kleine Brüche, daß wir ihren Werth durch practische Messungen nicht mehr im Stande sind zu beurtheilen.

Auffindung der geographischen Lage verschiedener Oerter durch trigonometrische Messungen.

§. 19.

Bei der trigonometrischen Ausmessung der Erde ist folgende Aufgabe eine der wichtigsten: ist die geographische Lage, das heißt: die Länge und Breite irgend eines Punctes der Erde, und sein Abstand von einem zweiten Puncte nebst der Richtung dieser Abstandslinie bekannt: so soll des letzteren Länge und Breite gefunden werden.

Auf der Tab. I. Fig. a. mag A den Weltpol anzeigen, ABM den Meridian des Punctes B; ACN aber den Meridian des Punctes C; es wird demnach AB das Complement der geographischen Breite des Punctes B; AC das Complement der geographischen Breite des Punctes C seyn. Kennt man nun die Länge und Breite des Punctes B, seinen Abstand BC von dem Puncte C, und den Winkel ABC, den dieser Abstand mit dem Meridian von B macht, oder das Azimuth von C, auf dem Horizont von B gemessen: so soll AC, der Winkel BAC, und der Winkel ACB, oder das Azimuth von B, gesehen auf dem Horizont von C, gefunden werden.

Die Seite BC ist durch trigonometrische Messungen, z. B. in Toisen oder auch in lithauischen Ellen, gegeben, man verwandle dieselbe in den Bogen: so muß die Gestalt der Erde, und der Radius des Kreises, der durch den Punct B geht, als bekannt vorausgesetzt werden. Aus §. 16. wissen wir, daß, wenn die Gestalt der Erde zu $\frac{1}{310}$ angenommen wird, die Länge eines Meridiangrades für Lithauen 57104,5 Toisen beträgt; für Lithauen wird also der Bogen 1′=951,742 Toisen, 1″= 15,8623 Toisen seyn; und wird BC durch die letzte Zahl divi-

dict: so erhält man BC für Lithauen in Secunden. Wir entfernen uns auch nicht viel von der Wahrheit, wenn wir den Theil der Erdoberfläche in der Gegend von B nicht nur in der Richtung des Meridians, sondern auch in jeder andern Richtung für eine Kugel von demselben Radius annehmen. Wird von C auf den Meridian ABM der senkrechte Bogen CD gezogen: so ist in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke BCD:

$$\sin BC.\ \sin CBD = \sin CD;\quad \tan BC.\ \cos CBD = \tan BD.$$

AB + BD ist das Complement der Breite von dem Puncte C; der Winkel CAB ist der Längenunterschied zwischen B, C und

$$\sin CAB = \frac{\sin BC.\ \sin ABC}{\sin (AB + BD)}.$$

Nennen wir H die Breite des Punctes B, BD = dH: so ist $AB = 90° - H$; $AB + BD = 90° - (H - dH)$.

Beispiel. Es sey BC = 3640 Toisen, H = 54° 41′; ABC = 120° 30′: so erhält man

$$CBD = 59°\ 30';\quad \frac{3640}{15,8623} = 229'',47 = 3'49'',5 = \delta;$$

$$\begin{aligned} l.\ \sin\delta &= 7,0463564 + \\ l.\ \sin CBD &= 9,9353204 + \\ \hline l.\ \sin CD &= 6,9816768;\ 3'17'': \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l.\ \tan\delta &= 7,0463567 + \\ l.\ \cos CBD &= 9,7054689 + \\ \hline l.\ \tan BD &= 6,7518256;\ 1'56'' = dH; \end{aligned}$$

also

AC = 35° 20′ 56″; und folglich die Breite von C, 54° 39′ 4″.

$$\begin{aligned} l.\ \sin\delta &= 7,0463564 + \\ l.\ \sin ABC &= 9,9353204 + \\ Comp.\ l.\ \sin AC &= 0,2376563 + \\ \hline l.\ \sin A &= 7,2193331; \end{aligned}$$

der Winkel A 5′ 42″ für den Längenunterschied.

Da aber in diesem Beispiele sehr kleine Bogen vorkommen: so würde man der Sicherheit wegen statt der trigonome-

trischen Linien besser ihre Bogen selbst, z. B. $\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{2.3}$ nach §. 16., setzen können.

Im Dreiecke ABC ist

$$\cos AC = \cos AB.\ \cos BC + \sin AB.\ \sin BC.\ \cos B,$$

oder auch

$$\sin(H + dH) = \sin H.\ \cos\delta + \cos H.\ \sin\delta.\ \cos B.$$

Die letzte Gleichung entwickelt $\sin(H + dH) = \sin H.\ \cos dH + \cos H.\ \sin dH$; und wenn man $\cos dH = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}dH$; $\sin dH = 2\sin\frac{1}{2}dH.\ \cos\frac{1}{2}dH$; $\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta$ setzt, so erhält man sofort folgende Gleichung: $\sin\frac{1}{2}dH.\cos\frac{1}{2}dH - \sin^2\frac{1}{2}dH.\ \tang H = \frac{1}{2}\sin\delta.\cos B - \sin^2\frac{1}{2}\delta.\tang H$, setzen wir $-\tang H = a$; $\frac{1}{2}\sin\delta.\ \cos B - \sin^2\frac{1}{2}\delta.\ \tang H = b$; und dividiren die ganze Gleichung mit $\cos^2\frac{1}{2}dH$, wohl merkend, daß $\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}dH} = \sec^2\frac{1}{2}dH = 1 + \tang^2\frac{1}{2}dH$: so erhalten wir eine Gleichung, die ziemlich oft in der Astronomie vorkommt.

$$(a - b)\tang^2\tfrac{1}{2}dH + \tang\tfrac{1}{2}dH = b;$$

und folglich

$$\tang\tfrac{1}{2}dH = \frac{-1 \pm \sqrt{[1 + 4b(a-b)]}}{2(a-b)}.$$

Die Function, unter dem Wurzelzeichen in einer unendlichen Reihe dargestellt, giebt

$$\tang\tfrac{1}{2}dH = b - b^2(a-b) + 2b^3(a-b)^2 - 5b^4(a-b)^3 + 2.7b^5(a-b)^4 - \text{etc.}$$

Oder auch, um das Wurzelzeichen wegzuschaffen, setze man $2\sqrt{(a-b)b} = \tang y$; $4(a-b)b = \tang^2 y$; $1 + \tang^2 y = \sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$; und es ist sofort

$$\tang\tfrac{1}{2}dH = -\frac{1}{2(a-b)} \pm \frac{1}{2(a-b)\cos y} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}y}{(a-b)\cos y};$$

hat man aber die Tangente: so ist der Bogen

$$\tfrac{1}{2}dH = \frac{\tang \tfrac{1}{2}dH}{\sin 1''} - \frac{\tang^3 \tfrac{1}{2}dH}{\sin 3''} + \frac{\tang^5 \tfrac{1}{2}dH}{\sin 5''} - \text{etc.}$$

Als Beispiel wollen wir die bereits oben angegebenen Zahlen nehmen: $B = 120°30'$, $\delta = 3'49'',5$, $\tfrac{1}{2}\delta = 1'55''$, $a = -1,4114$; man sucht b, y und den Werth für $\tang \tfrac{1}{2} dH$.

$l.\sin\delta = 7,0463564 +$	$l.\sin\tfrac{1}{2}\delta = 6,7462727 +$
$l.\cos B = 9,7054689 -$	$l.\sin^2\tfrac{1}{2}\delta = 3,4925454 +$
$\text{Comp.}\ l.\ 2 = 9,6989700 +$	$l.\tang H = 0,1496747 +$
$l.(1)\ 6,4507953 -$	$l.(2)\ 3,6422201 +$

$(1)\ 0,000282455 -$; $(2)\ 0,000000438 +$;

$(1) - (2) = 0,000282893 -$;

also nahe

$b = -0,0003$; $a - b = -1,4111$;

$l.(a-b) = 10,1495578 -$ die Hälfte	$l.(a-b)b = 8,3005953 +$
$l.b = 6,4516329 -$	$l.2 = 0,3010300 +$
$l.(a-b)b = 16,6011907 +$	$l.\tang y = 8,6016253 +$
$y = 2°17'18''$	$\tfrac{1}{2}y = 1°8'39''$
$l.(a-b) = 0,1495578 -$	$l.\sin^2\tfrac{1}{2}y = 6,6006752 +$
$l.\cos y = 9,9996536 +$	$\text{Comp.}\ l.(3) = 9,8507886 -$
$l.(3)\ 0,1492114 -$	$l.\tang\tfrac{1}{2}dH = 6,4514638 -$

$-\tfrac{1}{2}dH = 58''$; $-dH = 1'56''$ wie oben. Man erhält dH negativ; denn der Punct C hat eine kleinere Breite als B, es wird also die Breite von $C = 54°39'4''$ seyn.

Oben fanden wir den Winkel A, oder den Längenunterschied vermittelst der ersten Hauptgleichung; der Winkel BCA, oder das Azimuth von B gemessen auf dem Horizont von C, kann, nebst dem Winkel A, auch nach den Nepper'schen Analogien gefunden werden. Und Delambre stellt die auf diese Weise hierüber erhaltenen Formeln in seiner Astronomie auf *).

---

*) Man sehe Delambre's Astronomie. Tom. III. p. 550. 551.

Weil aber im Dreiecke ABC (Tab. I. Fig. a.) bereits alle drei Seiten nebst dem Winkel ABC bekannt sind: so können wir diese Aufgabe durch die neuen, in §. 2. gegebenen Gleichungen [1,], [1,,], [1,,,], wo nur Tangenten und Sinus vorkommen, ganz bequem lösen.

$$\tang \tfrac{1}{2} A = \tang \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(b+c-a)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} C = \tang \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b-c)}.$$

In unserem Beispiele ist

$$a = 3'49'',5 \quad b = 35^\circ 20'56'' \quad c = 35^\circ 19'0'';$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}(a+c-b) = 56'',75; \quad \tfrac{1}{2}(b+c-a) = 35^\circ 18'3'',25$$

$$\tfrac{1}{2} B = 60^\circ 15'; \quad \tfrac{1}{2}(a+b-c) = 2'52'',75.$$

$$\begin{aligned} \text{l. } \sin 56'',75 &= 6,4395280 \\ \text{l. } \tang \tfrac{1}{2} B &= 0,2429480 \\ \text{Comp. l. } \sin(35^\circ 18'3'',25) &= \underline{0,2381695} \\ \text{l. } \tang \tfrac{1}{2} A &= 6,9206455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l. } \sin 56'',75 &= 6,4395280 \\ \text{l. } \tang \tfrac{1}{2} B &= 0,2429480 \\ \text{l. } \sin(2'52'',75) &= \underline{3,0770085} \\ \text{l. } \tang \tfrac{1}{2} C &= 9,7594845 \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\tfrac{1}{2} A = 2'51'', \quad \tfrac{1}{2} C = 29^\circ 53'18'',$$

$$A = 5'42''. \quad C = 59^\circ 46'36''.$$

Diese neue Methode hat auch noch etwas für sich. Wollten wir nämlich, der größeren Genauigkeit wegen, die Bogen selbst aus den Tangenten bestimmen: so würden wir dieß vermittelst der bereits angedeuteten Formel $\tfrac{1}{2} dH = \frac{\tang \tfrac{1}{2} dH}{\sin 1''}$ — etc. ausführen können. Wir haben also hier eine, in der höheren Geodäsie sehr wichtige Aufgabe auf eine ziemlich einfache Weise durch die sphärische Trigonometrie gelös't. Für ähnliche Rechnungen unter irgend einer anderen Breite, wo

man etwa den in Toisen gegebenen Bogen BC in Kreissecunden ausdrücken wollte, findet man bei Delambre sehr bequem eingerichtete Tafeln berechnet *).

Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit dem ebenen.

§. 20.

Es wird gut seyn, sich hier an den in §. 1. aufgestellten Euclidischen Satz zu erinnern. Es wurde nämlich gezeigt, daß $\sin A = \frac{d}{2bc}$; und auf ähnliche Art erhält man

$$\sin B = \frac{d}{2ac}, \quad \sin C = \frac{d}{2ab},$$

wo der Werth für d bei allen drei Winkeln A, B, C der nämliche bleibt, hieraus folgt

$$a : b = \sin A : \sin B \quad [I]$$

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B;$$

und folglich

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\tang\frac{1}{2}(A-B)}; \quad [II]$$

auch giebt der Euclidische Satz in §. 1.

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2;$$

und wird die erste Gleichung von der zweiten abgezogen: so erhält man

$$c(a.\cos B - b.\cos A) = a^2 - b^2;$$

in dieser Gleichung sind $a\cos B$, $b\cos A$ zwei Abschnitte der Seite c, welche das aus C gefällte Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite macht; es ist also

$$c : a + b = a - b : a\cos B - b\cos A. \quad [III]$$

Es lassen sich demnach die drei Lehrsätze der ebenen Tri-

*) M. s. Base du système métrique, Tom. III.

gonometrie [I], [II], [III] aus demselben Princip ableiten, aus welchem wir die Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie erhielten.

Noch zeigt uns der Satz des 1. §., daß

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc};$$

wird die Differenz der Quadrate in Factoren aufgelös't, und die eine Gleichung durch die andere dividirt: so ist

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{(a+b+c)\,(b+c-a)};$$

und eben so

$$\left.\begin{aligned} \tan^2 \tfrac{1}{2} B &= \frac{(a+b-c)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+c-b)}, \\ \tan^2 \tfrac{1}{2} C &= \frac{(a+c-b)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+b-c)}. \end{aligned}\right\} \text{[IV]}$$

Diesen schönen Lehrsatz [IV] der ebenen Trigonometrie, nur zu wenig in derselben bekannt, hat Robert Simson in seiner, Euclid's Elementen angehängten Trigonometrie synthetisch bewiesen *). Hier habe ich den Beweis aus der in §. 1. angeführten Gleichung analytisch abgeleitet, und dadurch gezeigt: daß beide Trigonometrien durch die Analysis, aus derselben Eigenschaft des ebenen Dreiecks, die Euclid in der XII. und XIII. Proposition des II. Buches aufstellt, erhalten werden können.

---

*) Anmerkung. Der Herr Verfasser führt hier die polnische Uebersetzung der Euclidischen Elemente von dem verstorbenen Prof. Czech an. — Ich erlaube mir also, die Leser auf das Simsonsche Werk selbst zu verweisen. M. s. The Elements of Euclid by Robert Simson. Edinburgh MDCCLXXXI. pag. 487. [F]

Durch die Gleichung [IV] wird sogleich folgende Aufgabe der ebenen Trigonometrie gelöſ't: ſind drei Seiten in einem Dreiecke gegeben, ſo findet man ſeine Winkel. Wird von dieſen Gleichungen eine durch die andere dividirt, und die Quadratwurzel ausgezogen: so erhält man

$$\frac{\tang \frac{1}{2} A}{\tang \frac{1}{2} B} = \frac{a+c-b}{b+c-a}, \quad \frac{\tang \frac{1}{2} A}{\tang \frac{1}{2} C} = \frac{a+b-c}{b+c-a},$$

$$\frac{\tang \frac{1}{2} B}{\tang \frac{1}{2} C} = \frac{a+b-c}{a+c-b};$$

Gleichungen, welche denen in §. 2. [1,], [1,,], [1,,,] ähnlich ſind, mit dem Unterſchiede, daß im ebenen Dreiecke die Seiten ſich beim ſphäriſchen in die Sinus der Seiten verwandeln, was uns ſchon anders woher bekannt iſt.

Wird im ebenen Dreiecke ABC (Fig. 5. Tab. I.) aus einem ſeiner Winkel ein Perpendikel auf die ihm gegenüberſtehende Seite gezogen: ſo iſt der Flächeninhalt dieſes Dreiecks $\frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$. Denkt man ſich z. B. das Perpendikel aus C auf die gegenüberſtehende Seite c gezogen: ſo ſind die Abſchnitte dieſer Seite $b \cos A$, $a \cos B$; ihre Differenz $a \cos B - b \cos A$. Nun weiß man aber, daß

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b.\ \cos A),$$

und

$$b = \frac{a.\ \sin B}{\sin A}, \text{ alſo } a^2 - b^2 = ac\,\frac{\sin(A-B)}{\sin A};$$

$$\frac{(a^2-b^2)\sin A}{\sin(A-B)} = ac, \quad c = \frac{b.\ \sin C}{\sin B};$$

folglich wird

$$\frac{1}{2} ba.\ \sin C = \frac{1}{2}\,\frac{(a^2-b^2)\sin A.\ \sin B}{\sin(A-B)} \Big\} = \text{dem Flächeninhalte des Dreiecks [V].}$$

Im ebenen Dreiecke iſt bekanntlich

$$a : b = \sin A : \sin B,$$

im ſphäriſchen aber

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B;$$

da nun aber, wenn man bloß zwei Glieder in der Reihe §. 16. nimmt

$$\sin a = a - \tfrac{1}{6}a^3,\ \sin b = b - \tfrac{1}{6}b^3:$$

so ist im sphärischen Dreiecke nahe

$$\sin A : \sin B = a(1 - \tfrac{1}{6}a^2) : b(1 - \tfrac{1}{6}b^2);$$

woraus denn folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A(1 - \frac{1}{6}b^2)}{\sin B(1 - \frac{1}{6}a^2)}.\quad [M]$$

Der Winkel zwischen den Bogen ist größer, als der Winkel zwischen den Sehnen; soll demnach das sphärische Dreieck in ein ebenes von gleich langen Seiten verwandelt werden: so müssen die Winkel des ersteren um eine gewisse Größe verkleinert werden; es heiße diese Größe x: so folgt aus [M]

$$\sin A(1 - \tfrac{1}{6}b^2) : \sin B(1 - \tfrac{1}{6}a^2) = \sin(A-x) : \sin(B-x) = a : b$$
$$= \sin A.\ \cos x - \cos A.\ \sin x : \sin B.\ \cos x - \cos B.\ \sin x.$$

Das Product der äußeren und der inneren Glieder genommen, und die ganze Gleichung durch $\cos x$ dividirt, giebt

$$\tfrac{1}{6}(a^2 - b^2)\sin A.\ \sin B = \operatorname{tang} x.\ \sin(A-B)$$
$$-(\tfrac{1}{6}b^2 \sin A.\ \cos B - \tfrac{1}{6}a^2 \cos A.\ \sin B)\operatorname{tang} x;$$

und wird in dieser Gleichung das Glied $-(\frac{1}{6}b^2 \sin A.\ \cos B - \frac{1}{6}a^2 \cos A.\ \sin B)\operatorname{tang} x$, als sehr klein, vernachlässigt: so bleibt

$$\operatorname{tang} x = \tfrac{1}{6}(a^2 - b^2)\frac{\sin A.\sin B}{\sin(A-B)}\Big\} = \tfrac{1}{3}\text{ Flächeninhalt des Dreiecks}\quad [VI].$$

Weil nun, wenn man das sphärische Dreieck in ein ebenes von gleich langen Seiten verwandelt, der Flächeninhalt des ersteren nahe dem Flächeninhalte des zweiten gleich ist; denn aus §. 18. weiß man bereits, daß nahe

$$P = 2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\ \sin A = 2\tfrac{1}{2}b\ \tfrac{1}{2}c \sin A = \tfrac{1}{2}bc\sin A$$
$$= \tfrac{1}{2}ba\sin C;$$

der Flächeninhalt aber des sphärischen Dreiecks $P = A + B + C - 180°$, d. i. gleich dem Ueberschusse ist: so erhält man

$$x = \tfrac{1}{3}P.$$

Hieraus folgt nun der sehr wichtige und schöne Lehrsatz: Wenn in einem sphärischen Dreiecke die drei Seiten gegen die Oberfläche der Kugel sehr klein sind, und man vermindert jeden Winkel desselben um den dritten Theil des Ueberschusses: so wird das sphärische Dreieck in ein ebenes von gleichem Flächeninhalte verwandelt; und man kann dasselbe als ein ebenes behandeln. Enthielten selbst die Seiten des Dreiecks einen oder zwei Grade, d. i. 15 oder 30 Meilen; immer wird man noch diesen Lehrsatz mit großem Nutzen bei der Ausmessung der Erde anwenden können, und allemal kann dann die Auflösung der sphärischen Dreiecke auf die der ebenen zurückgebracht werden. Wir verdanken diesen schönen Satz dem berühmten Legendre, welcher ihn zuerst ohne Beweis in den Acten der Pariser Academie der Wissenschaften vom Jahre 1787 bekannt machte. Dann ihn aber im Jahre 1798 auf die hier auseinandergesetzte Art bewies. In demselben Jahre gab Lagrange einen andern Beweis für diesen Satz, den Legendre in seine Geometrie aufnahm *). Auch Delambre führt einen Beweis dieses Satzes **), indem er nämlich jeden Winkel des sphärischen Dreiecks um den dritten Theil des Ueberschusses vermindert, kommt er auf die Gleichung: $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$; woraus er denn folgert, daß das geradlinige Dreieck, in welchem die Summe der drei Winkel $= 180^{\circ}$ ist, nahe einem sphärischen Dreiecke, welches eben so lange Seiten als das geradlinige hat, gleich sey.

Die Eigenschaft des ebenen Dreiecks, daß in ihm die Summe aller Winkel immer constant und bestimmt ist, führt zu folgenden Gleichungen.

---

*) Legendre Géométrie. 5te Ausgabe. pag. 416.

**) Delambre Base du système métrique, Tome II. pag. 709.

Weil $A + B + C = 180^\circ$, $C = 180^\circ - (A + B)$,

$$\tang C = -\tang(A+B) = -\frac{\tang A + \tang B}{1 - \tang A . \tang B}:$$

so ist

$$\tang A + \tang B + \tang C = \tang A . \tang B . \tang C; \quad [\lambda]$$

und werden in der Gleichung [λ] die Tangenten durch die Sinus und Cosinus ausgedrückt: so erhält man

$$\sin A . \sin B . \sin C = \sin A . \cos B . \cos C + \sin B . \cos A . \cos C + \sin C . \cos A . \cos B:$$

$$\cos C \sin(A+B) + \sin C \cos(A-B) = 2 \sin A . \sin B . \sin C. \quad [\lambda']$$

Aus den hier angedeuteten Gleichungen könnte man noch andere, die oft von großem Nutzen da sind, wo ebene Dreiecke vorkommen, ableiten; was aber außer den Grenzen der gegenwärtigen Schrift liegt.

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Trigonometrie auf Aufgaben der sphärischen Astronomie.

Allgemeine Darstellung der astronomischen Rechnungen.

§. 21.

Horizont, Meridian, Aequator und Ecliptik sind vier Ebenen größter Kreise an der Himmelskugel, deren Lage wir für jeden Punct der Erde suchen; und in der Astronomie erfahren wir, wie die Himmelskörper gegen die genannten Ebenen liegen; denn ohne dieß würden wir nicht im Stande seyn, die Bahn derselben zu bestimmen. Die Beobachtungen geben die Lage des Gestirns gegen den Horizont, Meridian und Aequator; weiß man nun, welche Lage die Ecliptik gegen den Aequator hat: so gelangt man mittelst trigonometrischer Rechnungen von der Lage des Gestirns gegen den Aequator zur Lage desselben gegen die Ecliptik. So wie nun durch die Ecliptik die Bahn der Erde, oder die scheinbare Bahn der Sonne dargestellt wird, eben so haben auch die anderen beweglichen Himmelskörper eigene Bahnen, in denen ihre Bewegungen geschehen; wir erfahren demnach, welche Lage diese Bahnen gegen die Ecliptik und gegen den Aequator haben; und gelangen von der Lage gegen die erwähnten Ebenen zur Kenntniß der Oerter jener Himmelskörper auf ihrer eigenen Bahn. Das

Ganze wird vermittelst Bogen größter Kreise, die man durch die Pole oder andere bereits bekannte Puncte dieser Ebenen, und durch irgend ein Gestirn legt, vollzogen; diese Bogen durchschneiden einander, und bilden sphärische Dreiecke. Die sphärische Astronomie beschäftigt sich beinahe gänzlich, erstens: mit der Aufstellung und Einrichtung der Instrumente für einige dieser Kreise; zweitens: mit der Aufsuchung der Werthe für jene Bogen und Winkel, welche uns von einem Kreise zu dem andern, und zur Bestimmung der Lage des Gestirns gegen diese Kreise; daher aber auch zur Einsicht jener Ordnung, in der sie uns am Himmel erscheinen; und zur Kenntniß verschiedener Phänomene, deren Ursprung in dieser Ordnung und Lage nachzusuchen ist, führen.

In der Astronomie werden also zuerst alle Bahnen als kreisförmig betrachtet: man denkt sich an der hohlen Kugelfläche des Himmels alle diese Kreise, und sucht dann, was für eine Lage der Himmelskörper gegen dieselben hat. Die in jedem Augenblicke gegebene Ortsveränderung, in Beziehung auf diese Kreise, zeigt uns die scheinbare Bahn des Himmelskörpers; woraus die Mechanik die wahre Bahn; die Ursachen, durch welche dieselbe bewirkt wird; die Veränderungen, denen sie unterworfen ist; die Gesetze, welche dabei Statt finden; und die Dauer der Zeit, in welcher jene Bahn vollendet wird, ableitet. Die Zusammenstellung dieser Kenntnisse enthüllt uns die vergangene und zukünftige Geschichte der Naturkörper am Himmel; denn daraus kann man mit Gewißheit auf die Lage, Bahn, und auf die daraus sich ergebenden Phänomene der Himmelskörper, sowohl für die bereits verflossenen, als auch für die noch bevorstehenden Jahrhunderte schließen. Vorstehendes ist eine kurze und treue Zusammenstellung der hauptsächlichsten Beschäftigungen in der Astronomie.

Bei allen hier zu lösenden Aufgaben wollen wir durchgehends unsere Aufmerksamkeit auf ein sphärisches Dreieck richten,

dessen Winkel wir mit A, B, C, die diesen Winkeln in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten aber mit a, b, c bezeichnen wollen; und in welchem die Seiten und Winkel alle in der Astronomie gebräuchlichen Benennungen erhalten können. Indem wir nun diese Benennungen der Seiten und Winkel in die trigonometrischen Gleichungen einführen, so sollen daraus zugleich, sowohl die Beweise der in der Astronomie gebrauchten Methoden, als auch die Beantwortung der Frage selbst abgeleitet werden. Es soll aber beständig bezeichnet werden:

die gerade Aufsteigung des Gestirns (Ascensio recta) mit α,
die Abweichung des Gestirns (Declinatio) . . . . — β,
die geographische Breite eines Ortes . . . . . . — H,
die Höhe des Gestirns . . . . — $\varkappa$,
die Länge des Gestirns . . . . — λ,
die Breite des Gestirns . . . . — γ.

Noch andere Benennungen werden sich weiter unten zeigen.

I.

Lage des Gestirns gegen den Horizont, gegen den Meridian und gegen den Aequator.

Der Stundenwinkel, das Azimuth und der parallactische Winkel.

§. 22.

Im Dreiecke ABC (Tab. I. Fig. 2.) sey A der Weltpol oder der Pol des Aequators, B das Zenith eines Punctes auf der Erde, C ein Gestirn, BA oder c ein Stück vom Meridian. Hat man die Declination β dieses Gestirns: so ist b das Complement derselben, das heißt $b = 90^\circ - \beta$; kennt man nun noch die Breite des Ortes H, und die Höhe des Gestirns $\varkappa$:

so ist das Complement der ersteren $c = 90° - H$, der anderen hingegen $a = 90° - \varkappa$. Es werden demnach im Dreiecke ABC alle drei Seiten a, b, c bekannt seyn; und wir können aus denselben, vermittelst der Gleichung [1′] §. 2. den Winkel A, welchen man den Stundenwinkel nennt, und der auf dem Aequator die Entfernung des Gestirns vom Meridian anzeigt, finden. Durch die Gleichung [1″] erhalten wir den Winkel B, oder das Azimuth, das heißt: die Entfernung des Gestirns vom Meridian auf dem Horizonte. Endlich giebt noch die Gleichung [1‴] den parallactischen Winkel C, das heißt: die Lage des Gestirns gegen den Aequator und Horizont zugleich, und dieser Winkel ist von weitläuftigem Gebrauche bei der Berechnung der Verfinsterungen.

Beispiel. Zu Wilna, wo die geographische Breite $H = 54° 41' 2''$, und folglich $c = 35° 18' 58''$ ist, wurde den 1. Mai 1819, als die Sonne eine nördliche Abweichung von $14° 57' 52''$ hatte, und also $b = 75° 2' 8''$ war, die Höhe der Sonne Nachmittags $35° 30'$ gefunden, und folglich $a = 54° 30'$: wie groß war zu der Zeit der Stundenwinkel der Sonne? wie groß das Azimuth? und wie groß der parallactische Winkel?

Man findet den Stundenwinkel:

$$\frac{a+b-c}{2} = 47° 6' 35'', \quad \frac{a+b+c}{2} = 82° 25' 33'',$$

$$\frac{a+c-b}{2} = 7° 23' 25''; \quad \frac{b+c-a}{2} = 27° 55' 33''.$$

$$\begin{array}{ll}
\text{l. sin}\,(47° 6' 35'') = 9{,}8649015 & \text{l. sin}\,(82° 25' 33'') = 9{,}9961947 \\
\text{l. sin}\,(7° 23' 25'') = \underline{9{,}1093332} & \text{l. sin}\,(27° 55' 33'') = \underline{9{,}6705503} \\
\qquad\qquad 8{,}9742347 & \qquad\qquad 9{,}6667450; \\
\qquad\qquad \underline{9{,}6667450} & \\
\qquad\qquad 9{,}3074897; &
\end{array}$$

hiervon die Hälfte $9{,}6537448 = \text{l. tang}\,\frac{1}{2}A$; $\frac{1}{2}A = 24° 15' 14'',5$ $A = 48° 30' 29''$; wird dieser Bogen in Zeit verwandelt ($15° = 1^h$): so erhält man $3^h 14' 2''$ Nachmittags.

Man findet das Azimuth:

l. sin (27° 55′ 33″) = 9,6705503 l. sin (82° 25′ 33″) = 9,9961947
l. sin (47° 6′ 35″) = 9,8649015 l. sin (7° 23′ 27″) = 9,1093332
9,5354518 9,1055279;
9,1055279
0,4299239;

die Hälfte 0,2149619 = l. tang ½ B; ½ B = 58° 38′ 2″, B = 117° 16′ 4″.

Man findet den parallactischen Winkel der Sonne:

l. sin (7° 23′ 25″) = 9,1093332 l. sin (82° 25′ 33″) = 9,9961947
l. sin (27° 55′ 33″) = 9,6705503 l. sin (47° 6′ 33″) = 9,8649015
8,7798835 9,8610962;
9,8610962
8,9187873;

die Hälfte 9,4593936 = l. tang ½ C; ½ C = 16° 3′ 59″, C = 32° 7′ 58″.

Die Höhe des Gestirns durch den Stundenwinkel und durch die Declination ausgedrückt.

§. 23.

Ist die Declination des Gestirns, und der Stundenwinkel desselben A, für irgend einen Ort von bekannter Breite gegeben: so sind im Dreiecke ABC zwei Seiten b, c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel A bekannt; und man findet mittelst der Fundamentalgleichung die Höhe des Gestirns 90° — a,

$$\cos a = \sin b.\ \sin c.\ \cos A + \cos b.\ \cos c; \quad [1]$$

auf den ersten Blick scheint diese Gleichung zur Berechnung mit Logarithmen unbequem zu seyn, man würde also hier besser die Gleichungen [m] oder [n] §. 8. gebrauchen können; jedoch läßt sich die Gleichung [1] in eine andere weit bequemere verwandeln. Setzt man für a, b, c die ihnen hier zukommenden Werthe, nämlich:

$$b = 90° - \beta;\ c = 90° - H;\ a = 90° - \varkappa;$$

so erhält die Gleichung [1] folgende Gestalt:

$$\sin\varkappa = \cos\beta.\ \cos H.\ \cos A + \sin\beta.\ \sin H$$
$$= \sin H (\sin\beta + \operatorname{cotg} H.\ \cos A.\ \cos\beta);$$

und nimmt man

$$\operatorname{cotg} H.\ \cos A = \operatorname{tang}\varphi:$$

so folgt

$$\sin\varkappa = \frac{\sin H}{\cos\varphi}\sin(\varphi+\beta) \text{ für die Höhe des Gestirns. [a]}$$

Beispiel. Es sey $\beta = 14^\circ\,57'\,52''$, $H = 54^\circ\,41'\,2''$, $A = 48^\circ\,30'\,29''$. Man suche zuvörderst φ

l. cotg $H = 9,8503164$	l. sin $H = 9,9116769$
l. cos $A = 9,8211956$	l. sin $(\varphi+\beta) = 9,8090417$
l. tang $\varphi = 9,6715120$	Comp. l. cos $\varphi = 0,0432335$
$\varphi = 25^\circ\,8'\,37''$,	l. sin $\varkappa = 9,7639521$
$\varphi+\beta = 40^\circ\,6'\,29''$.	$\varkappa = 35^\circ\,30'\,0''$.

Der halbe Tagbogen (Arcus semidiurnus); Auf- und Untergang der Gestirne; das Verweilen derselben über dem Horizont.

§. 24.

Wenn wir in der Fundamentalgleichung [1] die Entfernung des Gestirns vom Zenith, d. i. $a = 90^\circ$, setzen: so erscheint uns das Gestirn im Horizont oder aufgehend; zu der Zeit wird $\cos a = 0$, und die Gleichung [1] verwandelt sich in

$$o = \sin b.\ \sin c.\ \cos A + \cos b.\ \cos c;$$

da nun aber $b = 90^\circ - \beta$; $c = 90^\circ - H$: so ist

$$\cos A = -\operatorname{tang}\beta.\ \operatorname{tang} H; \text{ der halbe Tagbogen. [b]}$$

Der Winkel A umfaßt in diesem Fälle den ganzen Bogen, den ein Gestirn bei seinem täglichen Laufe vom Aufgange bis zu seinem Mittage beschreibt, und wird der halbe Tagbogen (Arcus semidiurnus) genannt. Ist die Abweichung des Gestirns nördlich: so ist β positiv, und folglich auch seine Tan-

gente; denn die Abweichung kann nicht $> 90°$ seyn; es muß demnach der Winkel A durchaus stumpf seyn. Ist des Gestirns Abweichung südlich: so ist β und auch seine Tangente negativ, der Winkel A aber spitz $< 90°$; für die nördlichen Bewohner verweilen also alle nördlichen Sterne länger als 12 Stunden über dem Horizont; alle südlichen Sterne hingegen kürzer.

Die Gleichung $\cos A = - \tang \beta . \tang H$ wird zur Berechnung des Auf- und Unterganges der Gestirne, und wie lange dieselben über dem Horizont irgend eines Ortes der Erde verweilen, gebraucht; was einzig und allein, wie man sieht, von der geographischen Breite des Orts, und von der Abweichung des Gestirns abhängt.

Beispiel. Den ersten Mai 1819 n. S. war in Wilna der Aufgang der Sonne bei 14°49′46″ nördlicher Abweichung; der Untergang derselben bei 14° 58′ 54″ Abweichung. Man sucht die Stunde des wahren Auf- und Unterganges der Sonne, und die Länge des Tages.

$$l. \tang (14°49'46'') = 9,4228544$$
$$l. \tang (54°41'2'') = 0,1496836$$
$$\text{für den Aufgang} \odot \; l. \cos A = 9,5725380 -$$
$$A = 180° - (68° 3'19'') = 111° 56' 41'' \; ^{*}),$$
$$l. \tang (14°58'54'') = 9,4274963$$
$$l. \tang (54°41'2'') = 0,1496836$$
$$\text{für den Untergang} \odot \; l. \cos A = 9,5771799 -$$
$$A = 180° - (67° 48' 25'') = 112° 11' 35''.$$

Diese Bogen in Zeit ausgedrückt ($15° = 1^h$) geben die Stunde des wahren Auf- und Unterganges der Sonne.

---

*) Anmerkung. Im Original ist hier in der Angabe der Minuten ein Schreibfehler, es steht nämlich da
$$180° - (68° 3'19'') = 111° 58' 41'';$$
dieser Schreibfehler macht es, daß die Zeit des wahren Aufganges der Sonne und die Länge des Tages für Wilna etwas anders herauskömmt. [F]

$111^\circ 56' 41'' = 7^h 27' 46'',7$, also die Stunde des wahren Aufganges ☉ $12^h - (7^h 27' 46'',7) = 4^h 32' 13'',3$

$112^\circ 11' 35'' = 7^h 28' 46'',3$ die Stunde des wahren Unterganges

$14^h 56' 33'',0$ der Sonne ☉.

Die Länge des Tages für Wilna ist demnach $14^h 56' 33'',0$.

Die größte, sowohl nördliche als südliche Abweichung der Sonne ist $23^\circ 27' 56'' = \pm \beta$; man sucht den längsten und kürzesten Tag für Wilna zur Zeit der Sonnenwenden.

$$\text{l. tang}\,(23^\circ 27' 56'') = 9,6375875$$
$$\text{l. tang}\,(54^\circ 41' 2'') = 0,1496836$$
$$\text{l. cos A} = 9,7872711 \mp$$

Für die Sommer-Sonnenwende $A = 127^\circ 47' 14'' = 8^h 31' 9''$,
— — Winter-Sonnenwende $A = 52^\circ 12' 46'' = 3^h 28' 51''$.

A ist der halbe Tagbogen, um den ganzen Tag zu erhalten, muß man den halben Tagbogen verdoppeln; es ist demnach in Wilna der längste Tag zur Zeit der Sommer-Sonnenwende $17^h 2' 18''$; der kürzeste hingegen zur Zeit der Winter-Sonnenwende $6^h 57' 42''$. Der Tag wird hier vom Aufgange der Sonne bis zum Untergange derselben betrachtet.

Wir wollen nun noch näher die Gleichung $\cos A = -\text{tang}\,\beta . \text{tang}\,H$ betrachten. Soll ein Gestirn an einem Orte nicht untergehen: so muß der halbe Tagbogen desselben 180° betragen; ist aber $A = 180^\circ$: so ist $\cos A = -1$; es muß also zuvörderst β durchaus positiv, und $\text{tang}\,\beta = \text{cotg}\,H$ seyn. Es werden demnach auf der nördlichen Halbkugel diejenigen nördlichen Sterne nicht untergehen, deren Abweichung entweder gleich oder größer, als das Complement der geogr. Breite des Orts ist. In Wilna gehen diejenigen Sterne nicht unter, deren nördliche Abweichung entweder gleich oder größer, als $35^\circ 19'$ ist.

Soll wiederum ein Gestirn an einem Orte der Erde nie aufgehen, also für denselben unsichtbar bleiben: so muß der

Stundenwinkel $A = 0$ werden; ist aber $A = 0$: so ist $\cos A = 1$, und unsere Gleichung wird $-\operatorname{tang}\beta . \operatorname{tang} H = 1$; es muß demnach β negativ, d. h. die Abweichung südlich seyn, und es ist $-\operatorname{tang}\beta = \operatorname{cotg} H$; alle südlichen Sterne, deren Abweichung gleich oder größer, als die geographische Breite eines Ortes ist, werden demnach an diesem Orte auf der nördlichen Halbkugel unsichtbar seyn.

Es kann aber A noch null oder 180°, und also $\cos A = \pm 1$ werden, wenn β beständig, die geographische Breite aber, oder H als veränderlich angenommen wird; und man erhält $\operatorname{tang} H = \pm \operatorname{cotg}\beta$, d. i. wenn β, H entweder gleichartig oder ungleichartig sind. Es wird demnach auf der nördlichen Halbkugel ein Gestirn mit nördlicher Abweichung an dem Orte der Erde, dessen Breite dem Complement der Abweichung des Gestirns gleich ist, nie untergehen; ein südliches Gestirn hingegen, von derselben oder größern Abweichung, kann an dem genannten Orte wiederum nie gesehen werden.

Ist $H = 0$: so erhält man die gerade Stellung der Sphäre (położenie proste sfery), zu der Zeit ist $\operatorname{tang} H = 0$, $\cos A = 0$, und folglich $A = 90°$; für die Bewohner unter dem Aequator verweilen also alle Sterne von irgend einer Abweichung so lange über dem Horizont, als unter demselben, das heißt mit andern Worten: Tag und Nacht sind unter dem Aequator einander gleich.

Ist $\beta = 0$: so befindet sich das Gestirn auf dem Aequator: $\operatorname{tang}\beta = 0$, $\cos A = 0$, $A = 90°$; es sind demnach die Gestirne auf dem Aequator für alle Bewohner der Erde sichtbar, und verweilen so lange über dem Horizont, als unter demselben.

Bei der parallelen Sphäre kann aus dem Dreiecke ABC nichts weiter abgeleitet werden; denn A fällt dann mit B zusammen, das heißt das Zenith mit dem Weltpole; und das ganze Dreieck verwandelt sich in den Bogen a, welcher Höhen- und Declinationskreis zugleich ist.

Die Morgen- und Abendweite.

§. 25.

Die Fundamentalgleichung §. 2. für den Winkel B

$\cos B = \frac{\cos b - \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}$ giebt den Winkel am Zenith, oder den Bogen auf dem Horizont; für den Auf- oder Untergang des Gestirns ist $a = 90°$, $\cos a = 0$, $\sin a = 1$; und die Gleichung für B verwandelt sich in $\cos B = \frac{\cos b}{\sin c}$; da nun aber $b = 90° - \beta$, $c = 90 - H$: so ist $\cos B = \frac{\sin \beta}{\cos H}$. Ist $B = 90°$, also $\cos B = 0$: so erhält man $\sin \beta = 0$, das heißt: das Gestirn hat gar keine Declination, und ist ein Punct des Aequators. Derjenige Punct, in welchem der Horizont vom Aequator durchschnitten wird, heißt der wahre Morgen- oder Ostpunct, und der wahre Abend- oder Westpunct; es ist dieses der Pol des Meridians, und steht gleich weit, nämlich 90°, sowohl von der nördlichen als südlichen Seite desselben ab. Nur die Gestirne, die auf dem Aequator selbst liegen, gehen in diesen Puncten auf und unter. Von den Gestirnen, welche verschiedene Declinationen haben, geht jedes in einem andern Puncte des Horizonts auf und unter; der zwischen dem wahren Ostpuncte, und zwischen dem Aufgangspuncte irgend eines Gestirns eingeschlossene Bogen des Horizonts heißt die Morgenweite (amplitudo ortiva) dieses Gestirns, auf der Westseite aber die Abendweite (amplitudo occidua). Der Winkel B am Zenith, welcher von dem zwischen dem Meridian und dem Aufgangspuncte irgend eines Gestirns eingeschlossenen Bogen gemessen wird, ist die Ergänzung zur Morgen- oder Abendweite; und folglich ist

$$\text{Sinus der Morgenweite} = \frac{\sin \beta}{\cos H}. \quad [c]$$

Beispiel. Die Sonne hat zur Zeit des Solstitiums eine Declination von 23° 27′ 56″. Wie groß ist zu derselben Zeit ihre Morgenweite in Wilna?

$$\text{l. sin}\,(23^\circ\,27'\,56'') = 9{,}6000987$$
$$\text{l. cos}\,(54^\circ\,41'\,2'') = 9{,}7619933$$
$$\text{l. sin}\,(\text{Morgenweite}) = 9{,}8381054;$$

es ist demnach die Morgenweite der Sonne 43° 32′ 12″, und zwar nach der Nordseite des Meridians im Sommer, und nach der Südseite desselben im Winter.

Aenderung des Stundenwinkels, und die Verbesserung des Mittags.

§. 26.

Der Stundenwinkel dient uns zur Bestimmung des Mittags, und zur Kenntniß des Ganges der Uhr; denn die Sonne hat sowohl Vormittags als Nachmittags, bei gleichem Abstande vom Meridian, dieselbe Höhe. Da sich nun aber in jeder Stunde die Declination der Sonne ändert, worauf denn auch die Aenderung des Stundenwinkels folgt: so ist klar, daß einer und derselben Vormittags und Nachmittags gefundenen Höhe entweder ein anderer Stundenwinkel, oder auch einem und demselben Stundenwinkel eine andere Höhe entsprechen kann. Beobachtet man demnach eine und dieselbe Sonnenhöhe (correspondirende Sonnenhöhen) Vormittags und Nachmittags, um den Augenblick des wahren Mittags zu haben: so muß der Stundenwinkel, wegen der veränderlichen Declination, verbessert werden.

Weil im Dreiecke **ABC** **A** der Weltpol, **B** das Zenith und **C** das Gestirn ist; und wenn man sich noch dazu erinnert, daß $a = 90^\circ - \varkappa$, $b = 90^\circ - \beta$, $c = 90^\circ - H$ ist: so erhält man den Stundenwinkel **A** nach der Fundamentalgleichung [1]

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\ \cos c}{\sin b.\ \sin c}$$

$$= \frac{\sin \varkappa - \sin \beta.\ \sin H}{\cos \beta.\ \cos H};$$

das heißt:

$$\sin \varkappa - \sin \beta.\ \sin H - \cos \beta.\ \cos H.\ \cos A = 0.$$

Wird in dieser Gleichung $\varkappa$, H constant gesetzt, und dieselbe in Beziehung auf A, β differentiirt *): so ist

$$- d\beta.\ \cos \beta.\ \sin H + d\beta.\ \sin \beta.\ \cos H.\ \cos A + dA.\ \sin A.\ \cos \beta.\ \cos H = 0,$$

und folglich

$$dA = d\beta \left\{ \frac{\tang H}{\sin A} - \frac{\tang \beta}{\tang A} \right\}. \quad [d]$$

In dieser Gleichung ist $d\beta$ die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen, einer des Morgens und der andern correspondirenden des Abends. Mittelst dieser Gleichung hat man Tafeln zur Verbesserung des aus gleichen Sonnenhöhen abgeleiteten Mittags berechnet. Da nun die Mitte zwischen den beiden Beobachtungen, einer des Morgens und der ihr correspondirenden des Abends, den Mittag giebt: so wollen wir die Uhrzeit bei der Beobachtung früh T, die Uhrzeit aber zwischen den beiden Beobachtungen I nennen, und den Bogen dA mit 15 dividiren, um ihn in Zeit zu verwandeln. Es wird demnach der Winkel A der Zeit $\frac{1}{2}$ I entsprechen, oder $\frac{1}{2}$ I wird in Theilen des Bogens ausgedrückt seyn; und man erhält die Formel für den

$$\text{wahren Mittag} = T + \tfrac{1}{2} I - \frac{1}{2.15} d\beta \left\{ \frac{\tang H}{\sin A} - \frac{\tang \beta}{\tang A} \right\} - [e].$$

Beispiel. Den 30. April 1819 n. S. wurde eine Sonnenhöhe Vormittags gemessen, und die Uhr zeigte zu der Zeit

*) Anmerkung. Der Anfänger kann hiermit die vierte Anmerkung §. 18. vergleichen. [F]

$10^h 33' 27''$

bei derselben Höhe Nachmittags zeigte die Uhr

$2^h 6' 44''$, oder $14^h 6' 44''$

$I = 3^h 33' 17''$

$\frac{1}{2} I = 1^h 46' 38'',5$; $A = 26^\circ 39' 37''$.

Die Declination der Sonne war bei der gemessenen Höhe

Nachmittags $14^\circ 36' 9''$ } $= \beta$
Vormittags $14^\circ 33' 25'',5$ }
Unterschied = = = $2' 43'',5 = 163'',5 = d\beta$.

l. tang $H = 0,1496836$ . . . . l. tang $\beta = 0,4144398$

l. sin $A = 9,6519556$ . . . . l. tang $A = 9,7007722$

$0,4977280$; $9,7136676$;

$3,146$ $0,517$.

$$\begin{array}{r} 3,146 \\ -0,517 \\ \hline 2,629. \end{array}$$

l. $2,63 = 0,4199557$

l. $163,5 = 2,2135178$

Compl. l. $30 = 8,5228788$

$1,1563523$; $14'',33$.

Die Uhrzeit bei der Beobachtung Vormittags $T = 10^h 33' 27''$

$\frac{1}{2} I = 1^h 46' 38'',5$

der unverbesserte Mittag $12^h 20' 5'',5$

Verbesserung = = $14'',3$

also die Uhrzeit des wahren Mittags $12^h 19' 51'',2$

Dieselbe Formel kann man auch zur Bestimmung der wahren Mitternacht gebrauchen, wenn man nämlich eine Höhe Abends, und die andere correspondirende des folgenden Tags Morgens nimmt; der Winkel A muß aber um 180° vergrößert werden, und man erhält

die wahre Mitternacht $= T + \frac{1}{2} I - \frac{1}{2.15} d\beta$

$$\left\{ \frac{\text{tang}\, H}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\text{tang}\, \beta}{\text{tang}(180^\circ + A)} \right\} - [f].$$

II.
Lage des Gestirns gegen den Aequator und gegen die Ecliptik.

Aus der Rectascension und Declination eines Gestirns dessen Länge und Breite zu finden.

§. 27.

Es sey im Dreiecke ABC (Fig. 6. Tab. II.) A der Pol des Aequators ♈DQ; B der Pol der Ecliptik ♈LP; C aber ein Gestirn. Der größte Kreis, von dem die Seite BA ein Bogen ist, heißt der Kolur der Solstitien oder Sonnenwenden (Colurus solstitiorum) (koto wrębne przesilen), derselbe hat zu Polen die Puncte der Nachtgleichen, von denen hier ♈ einer ist, und von diesem Puncte ♈ werden die Längen der Gestirne auf der Ecliptik, und die Rectascensionen derselben auf dem Aequator gezählt. ♈D ist die Rectascension α des Gestirns C; CD seine Declination β; ♈L desselben Gestirns Länge λ; und CL dessen Breite γ. ♈P = ♈Q = 90°. Der Winkel B = LP = 90° — λ; der Winkel BAC = 180° — CAP; CAP = 90° — α; und folglich der Winkel A des Dreiecks ABC = 90° + α. Der Winkel C wird in der Astronomie der Positionswinkel (Angulus positionis) genannt, BA oder c ist die Schiefe der Ecliptik, die wir immer mit ω bezeichnen wollen. Im gegenwärtigen Dreiecke BAC ist also

$$c = \omega,\quad a = 90° - \gamma,\quad b = 90° - \beta,\quad \angle A = 90° + \alpha,$$
$$\angle B = 90° - \lambda.$$

Kennt man die Schiefe der Ecliptik, die Rectascension und die Declination eines Gestirns: wie findet man dessen Länge und Breite? Diese Aufgabe auf das Dreieck ABC bezogen, will sagen, daß aus den gegebenen zwei Seiten b, c und dem von

ihnen eingeschlossenen Winkel A; die Seite α und der Winkel B gefunden werden soll. Die Fundamentalgleichung der Trigonometrie §. 2. giebt

$$\cos a = \sin b.\ \sin c.\ \cos A + \cos b.\ \cos c;$$

werden die gegenwärtigen Werthe der Seiten und Winkel gesetzt, wohl merkend, daß weil $A = 90^\circ + \alpha$: $\cos A = -\sin\alpha$, $\sin A = \cos\alpha$ seyn wird: so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$\sin\gamma = -\cos\beta.\ \sin\omega.\ \sin\alpha + \sin\beta.\ \cos\omega$$
$$= \sin\beta(\cos\omega - \sin\omega.\ \operatorname{cotg}\beta.\ \sin\alpha).$$

Man setze $\operatorname{cotg}\beta.\ \sin\alpha = \operatorname{tang}\varphi$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\varphi}(\cos\omega.\ \cos\varphi - \sin\omega.\ \sin\varphi):$$

so erhält man

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\varphi}\cos(\varphi + \omega)$$ für die Breite des Gestirns. [h]

Will man aus den nämlichen Seiten b, c, und aus dem Winkel A den Winkel B finden: so kann dieß mittelst der dritten Hauptgleichung in §. 5. geschehen; es ist bekanntlich

$$\operatorname{cotg} b.\ \sin c = \cos c.\ \cos A + \sin A.\ \operatorname{cotg} B.$$

Werden in diese Gleichung die gegenwärtigen Werthe der Seiten und Winkel eingeführt: so ist

$$\operatorname{tang}\beta.\ \sin\omega = -\cos\omega.\ \sin\alpha + \cos\alpha.\ \operatorname{tang}\lambda;$$

also

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\beta.\ \sin\omega + \cos\omega.\ \sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \operatorname{tang}\alpha\left(\cos\omega + \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha}\sin\omega\right).$$

Nimmt man

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\beta.\ \sin\alpha} = \operatorname{cotg}\varphi:$$

so verwandelt sich die Gleichung in

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\varphi}\sin(\varphi + \omega)$$ für die Länge des Gestirns. [g]

Beispiel. Arcturus, ein nördlicher Stern (im Sternbilde des Bootes), hat im Jahre 1820 zur Rectascension $\alpha = 211^\circ 51' 45''$, zur nördlichen Declination aber $\beta = 20^\circ 7' 28''$. Sirius, ein südlicher Stern (im Sternbilde des großen Hundes), hat zur Rectascension $\alpha = 99^\circ 18' 18''$, zur südlichen Declination $-\beta = 16^\circ 28' 33''$; man sucht die Länge und Breite dieser Sterne. Es ist hier bei diesen Untersuchungen genau zu merken, daß, da die nördliche Declination positiv, die südliche hingegen negativ ist, sowohl die Tangente, als der Sinus dieser letztern negativ, der Cosinus aber positiv seyn wird. Um die Subtraction eines Logarithmus in die Addition zu verwandeln, wird öfter dessen arithmetische Ergänzung, was wir mit Comp. vor dem Logarithmus andeuten, genommen. In astronomischen Rechnungen, besonders aber beim Gebrauche der Hülfswinkel, können oft große Fehler begangen werden, wenn ein uneigentlicher Winkel in die Frage eingeführt wird; es ist deshalb rathsam, genau auf die Zeichen $\pm$ der trigonometrischen Linien Acht zu haben; denn diese erleichtern, nach den in §. 12. bereits angedeuteten Regeln, das Erkennen der Zweideutigkeit, wenn dieselbe nicht schon durch die Bedingungen der Aufgabe selbst, oder durch andere mit Gewißheit bekannte Bogen und Winkel in der vorgelegten Frage erkannt werden sollte.

Die Rechnung für den Arctur:

$\alpha = 211^\circ 51' 45''$, $\beta = 20^\circ 7' 28''$, $\omega = 23^\circ 27' 54''$.

Man suche zuvörderst den Winkel φ:

$$\text{l. cotg}\,(20^\circ 7' 28'') = 0{,}4360068 +$$
$$\text{l. sin}\,(211^\circ 51' 45'') = 9{,}7225373 -$$
$$\text{l. tang}\,\varphi = 0{,}1585441 - \text{ im 4. Quadr.}$$
$$\varphi = 360^\circ - (55^\circ 14' 0'') = 304^\circ 46' 0''$$
$$\omega = 23^\circ 27' 54''$$
$$\varphi + \omega = 328^\circ 13' 54''$$

$$\text{l. tang}(211^\circ\,51'\,45'') = 9{,}7934673 +$$
$$\text{l. sin}(\varphi + \omega) = 9{,}7213868 -$$
$$\text{Comp. l. sin}\,\varphi = 0{,}0854024 -$$
$$9{,}6002565 + \text{ im 3. Quadr.}$$

$\lambda = 180^\circ + 21^\circ\,43'\,11'' = 6^z\,21^\circ\,43'\,11''$. Die Länge des Arcturs.

$$\text{l. sin}\,(20^\circ\,7'\,28'') = 9{,}5366346 +$$
$$\text{l. cos}\,(\varphi + \omega) = 9{,}9295128 +$$
$$\text{Comp. l. cos}\,\varphi = 0{,}2439456 +$$
$$\text{l. sin}\,\gamma = 9{,}7100930 +$$

Die nördliche Breite des Arcturs $\gamma = 30^\circ\,51'\,43''$.

Die Rechnung für den Sirius:

$$\alpha = 99^\circ\,18'\,18'' : -\beta = 16^\circ\,28'\,33''.$$
$$\text{l. cotg}\,(16^\circ\,28'\,23'') = 0{,}5290683 -$$
$$\text{l. sin}\,(99^\circ\,18'\,18'') = 9{,}9942475 +$$
$$\text{l. tang}\,\varphi = 0{,}5233158 - \text{ im 2. Quadr.}$$
$$\varphi = 180^\circ - (73^\circ\,18'\,59'') = 106^\circ\,41'\,1''$$
$$\omega = 23^\circ\,27'\,54''$$
$$\varphi + \omega = 130^\circ\,8'\,55''$$
$$\text{l. tang}\,\alpha = 0{,}7855645 -$$
$$\text{l. sin}\,(\varphi + \omega) = 9{,}8833061 +$$
$$\text{Comp. l. sin}\,\varphi = 0{,}0186777 +$$
$$\text{l. tang}\,\lambda = 0{,}6875483 - \text{ im 2. Quadr.}$$

Die Länge des Sirius $\lambda = 180^\circ - (78^\circ\,23'\,48'')$
$= 101^\circ\,36'\,12'' = 3^z\,11^\circ\,36'\,12''$.

$$\text{l. sin}\,(16^\circ\,28'\,33'') = 9{,}4527229 -$$
$$\text{l. cos}\,(\varphi + \omega) = 9{,}8094064 -$$
$$\text{Comp. l. cos}\,\varphi = 0{,}5419872 -$$
$$\text{l. sin}\,\gamma = 9{,}8041165 -$$

Die südliche Breite des Sirius $\gamma = 39^\circ\,33'\,57''$.

Aus der Länge und Breite eines Gestirns dessen Rectascension und Declination zu finden.

§. 28.

So wie uns zu der eben gelös'ten Aufgabe Beobachtungen führen, so führt uns der Gebrauch der Tafeln für die Bewegungen der Himmelskörper zur umgekehrten Aufgabe, nämlich: ist die Länge und Breite eines Gestirns bekannt, wie findet man dessen Rectascension und Declination? oder mit anderen Worten: die bekannte Lage eines Gestirns gegen die Ecliptik in die gegen den Aequator zu verwandeln.

In demselben Dreiecke (Fig. 6.) ABC werde die nämliche Bezeichnung der Seiten und Winkel beibehalten, so soll aus dem bekannten Winkel B, und aus den Seiten a, c der Winkel A und die Seite b gefunden werden. Die Fundamentalgleichung giebt

$$\cos b = \cos B.\ \sin a.\ \sin c + \cos a.\ \cos c;$$

da aber

$$b = 90° - \beta,\quad a = 90° - \gamma,\quad c = \omega,\quad B = 90° - \lambda:$$

so werden diese Werthe, in die letzte Gleichung gesetzt, folgende Gleichung geben

$$\sin\beta = \sin\lambda.\ \cos\gamma.\ \sin\omega + \sin\gamma.\ \cos\omega \quad [z]$$
$$= \sin\gamma(\cos\omega + \sin\lambda.\ \operatorname{cotg}\gamma.\ \sin\omega).$$

Und setzt man

$$\sin\lambda.\ \operatorname{cotg}\gamma = \frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\gamma} = \operatorname{tang}\varphi':$$

so erhält man

$$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{\cos\varphi'}\cos(\varphi' - \omega)$$ für die Declination des Gestirns. [i]

Zur Auffindung des Winkels A hat man die dritte Hauptgleichung §. 5.

$$\operatorname{cotg} a.\ \sin c = \cos c.\ \cos B + \sin B.\ \operatorname{cotg} A;$$

und hieraus

$$\cot g A = \frac{\cot g a. \sin c - \cos c. \cos B}{\sin B};$$

nun ist aber

$A = 90° + \alpha$, $\cot g A = -\tan g \alpha$, $a = 90° - \gamma$, $c = \omega$; $B = 90° - \lambda$; also

$$\tan g \alpha = \frac{-\tan g \gamma. \sin \omega + \sin \lambda. \cos \omega}{\cos \lambda}$$

$$= \tan g \lambda \left(\cos \omega - \frac{\tan g \gamma}{\sin \lambda} \sin \omega\right) \quad [D]$$

wird $\frac{\tan g \gamma}{\sin \lambda} = \cot g \varphi'$ gesetzt,

oder, was auf eins hinausläuft,

$$\tan g \varphi' = \frac{\sin \lambda}{\tan g \gamma}:$$

so folgt

$$\tan g \alpha = \frac{\tan g \lambda}{\sin \varphi'} \sin (\varphi' - \omega)$$ für die Rectascension des Gestirns. [i']

Für die Sonne, wenn $\gamma = o$, erhält man

$$\sin \beta = \sin \lambda. \sin \omega, \quad \tan g \alpha = \tan g \lambda. \cos \omega.$$

Beispiel. Man hat für das Jahr 1820 die Länge des Arcturs $6^z 21° 43' 11'' = \lambda$; dessen nördliche Breite $30° 51' 43'' = \gamma$; die Schiefe der Ecliptik $23° 27' 54'' = \omega$; und wiederum des Sirius Länge $3^z 11° 36' 12'' = \lambda$; dessen südliche Breite $39° 33' 57'' = \gamma$; man sucht die Rectascension und Declination dieser Sterne.

Die Rechnung für den Arctur; man suche zuerst φ', dann β, α:

$$\begin{aligned} \text{l. } \sin \lambda &= 9,5682798 - \\ \text{l. } \tan g \gamma &= 9,7764003 + \\ \hline \text{l. } \tan g \varphi' &= 9,7918795 - \text{ im 4. Quadr.} \end{aligned}$$

$\varphi' = 360° - (31° 46' 7'')$; $\varphi' - \omega = 304° 45' 59''$.

$$\text{l. sin}\,\gamma = 9{,}7100930 +$$
$$\text{l. cos}\,(\varphi' - \omega) = 9{,}7560514 +$$
$$\text{Comp. l. cos}\,\varphi' = 0{,}0704884 +$$
$$\text{l. sin}\,\beta = 9{,}5366328 +$$

Die nördliche Declination $\beta = 20^\circ\,7'\,28''$.

$$\text{l. tang}\,\lambda = 9{,}6002565 +$$
$$\text{l. sin}\,(\varphi' - \omega) = 9{,}9145990 -$$
$$\text{Comp. l. sin}\,\varphi' = 0{,}2786099 -$$
$$\text{l. tang}\,\alpha = 9{,}7934654 + \text{ im 3. Quadr.}$$
$$\alpha = 6^z\,31^\circ\,51'\,45''.$$

Die Rechnung für den Sirius; $\lambda = 101^\circ\,36'\,12''$, $\gamma = -(39^\circ\,33'\,57'')$.

$$\text{l. sin}\,\lambda = 9{,}9910327 +$$
$$\text{l. tang}\,\gamma = 9{,}9171209 -$$
$$\text{l. tang}\,\varphi' = 0{,}0739118 - \text{ im 2. Quadr.}$$

$\varphi' = 180^\circ - (49^\circ\,51'\,7'') = 130^\circ\,8'\,53''$; $\varphi' - \omega = 106^\circ\,40'\,59''$.

$$\text{l. sin}\,\gamma = 9{,}8041151 -$$
$$\text{l. cos}\,(\varphi' - \omega) = 9{,}4579988 -$$
$$\text{Comp. l. cos}\,\varphi' = 0{,}1905986 -$$
$$\text{l. sin}\,\beta = 9{,}4527125 -$$

Die südliche Declination $\beta = -(16^\circ\,28'\,32'')$.

$$\text{l. tang}\,\lambda = 0{,}6875451 -$$
$$\text{l. sin}\,(\varphi' - \omega) = 9{,}9813233 +$$
$$\text{Comp. sin}\,\varphi' = 0{,}1166902 +$$
$$\text{l. tang}\,\alpha = 0{,}7855586 - \text{ im 2. Quadr.}$$

$\alpha = 180^\circ - (80^\circ\,41'\,41'',5)$

$= 99^\circ\,18'\,18'',5$ für die Rectascension *).

*) Anmerkung. Der Leser kann auch noch eine andere schöne Auflösung dieser doppelten Aufgabe, die sich bloß auf die ebene Trigonometrie gründet, in der „Theoretischen und practischen Astronomie von J. J. Littrow.“ Wien 1821. Theil I. pag. 31. nachsehen. [F]

Jährliche Aenderung in der Lage der Gestirne.

§. 29.

Das Zurückweichen der Aequinoctialpuncte, was jährlich 50″,1 beträgt, vergrößert um eben so viel jährlich die Länge der Gestirne, ohne die Breite derselben zu stören. Der Aenderung in der Länge eines Gestirns folgt die Aenderung in der Rectascension und Declination, welche bestimmt werden muß, wenn man aus der Lage des Gestirns eines Jahrs die Lage desselben für ein anderes Jahr, oder selbst für irgend einen Tag im Jahre finden will. Zu diesem Ende nehme man die Gleichung [z] §. 28.

$$\sin\beta = \sin\lambda.\ \cos\gamma.\ \sin\omega + \sin\gamma.\ \cos\omega,$$

und differentiire dieselbe in Beziehung auf β, λ; γ, ω betrachte man als constant:

$$d\beta.\ \cos\beta = d\lambda.\ \cos\lambda.\ \cos\gamma.\ \sin\omega,$$

$$d\beta = d\lambda\ \frac{\cos\lambda.\ \cos\gamma.\ \sin\omega}{\cos\beta};$$

da nun aber im Dreiecke ABC nach der ersten Hauptgleichung §. 3.

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b},\ \text{das heißt}\ \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\cos\lambda}{\cos\beta}\ \text{ist:}$$

so giebt

$d\beta = d\lambda.\ \cos\alpha.\ \sin\omega$ [$\varkappa$] die Aenderung der Declination.

Aus der vorletzten Gleichung folgt auch noch:

$$\cos\alpha.\ \cos\beta - \cos\lambda.\ \cos\gamma = 0;$$

eine sehr wichtige Gleichung, die oft in der astronomischen Analysis gebraucht wird.

Man nehme nun aus dem vorhergehenden §. die Gleichung [D]

$$\text{tang}\,\alpha.\ \cos\lambda = -\text{tang}\,\gamma.\ \sin\omega + \sin\lambda.\ \cos\omega,$$

und differentiire sie in Beziehung auf α, λ,

$$\frac{d\alpha.\ \cos\lambda}{\cos^2 a} - d\lambda.\ \text{tang}\,\alpha.\ \sin\lambda = d\lambda.\ \cos\lambda.\ \cos\omega,$$

$$d\alpha = d\lambda(\cos\omega - \cos\omega.\ \sin^2\alpha + \text{tang}\,\lambda.\ \sin\alpha.\ \cos\alpha),$$

Nun ist aber im Dreiecke ABC nach der dritten Hauptgleichung §. 5.

$$\text{cotg}\,b.\ \sin c = \cos c.\ \cos A + \sin A.\ \text{cotg}\,B;$$

oder, indem man den Seiten und Winkeln in dieser Gleichung die ihnen hier zukommenden Werthe beilegt,

$$\text{tang}\,\beta.\ \sin\omega = -\cos\omega.\ \sin\alpha + \cos\alpha.\ \text{tang}\,\lambda,$$

und den so erhaltenen Werth für $\text{tang}\,\lambda$ in die Gleichung von $d\alpha$ eingeführt: so erhält man

$d\alpha = d\lambda(\cos\omega + \sin\alpha.\ \text{tang}\,\beta.\ \sin\omega)$ [$\varkappa'$] für die Aenderung der Rectascension.

Alles kommt nun darauf an, den Werth von $d\lambda$, oder die Veränderung, welche die Gestirne durch das Zurückweichen der Aequinoctien erleiden, anzugeben. In der sphärischen Astronomie wird dieser Werth aus der Vergleichung der älteren Beobachtungen mit den neueren; in der physischen hingegen aus den Rechnungsresultaten einer der schwierigsten Aufgaben, welche d'Alembert zuerst gelös't hat, erhalten. Setzt man diesen Werth für $d\lambda$ in die Gleichungen [$\varkappa$], [$\varkappa'$]: so erhält man die jährliche Aenderung der Rectascension und Declination. Der große Vorzug dieser Gleichungen liegt unstreitig darin, daß in denselben weder die Länge noch die Breite, welche erst berechnet werden müßten, und nur α, β, welche durch Beobachtungen gefunden werden, vorkommen. Weil nun die Gleichung [$\varkappa$] von $\cos a$ abhängt: so sind die jährlichen Aenderungen der Declination für alle nördlichen Sterne, welche sich in Beziehung auf ihre Rectascension im ersten oder vierten Quadranten befinden, positiv; für diejenigen nördlichen Sterne hingegen, welche sich in Beziehung auf ihre Rectascension im zweiten oder dritten Quadranten befinden, negativ. Bei den südlichen Sternen, wo β negativ vorkommt, ist umgekehrt die Aenderung der Declination im ersten und vierten Quadranten negativ; im zweiten und dritten aber positiv; was uns die Abwechselung der

Zeichen, die wir der jährlichen Aenderung der Declination in Sternverzeichnissen vorgesetzt finden, erklärt.

In der Formel für die Aenderung der Rectascension ist das erste Glied $d\lambda \cos \omega$ allen Sternen gemeinschaftlich; wir brauchen demnach bloß das zweite Glied für jeden Stern zu berechnen. In dieser Rechnung haben wir die Schiefe der Ecliptik für unveränderlich angenommen, indessen erleidet auch diese, wegen der Einwirkung der Planeten auf die Erde, eine kleine Veränderung, die 50″ auf hundert und vierzig Jahre beträgt; aufs Jahr also — 0″,357, oder 36″ auf hundert Jahre. Um also auch diese Veränderung in Rechnung zu bringen: so ist $-0'',357 \sin \omega = -0'',142$; diese Größe wird vom ersten Gliede $d\lambda \cos \omega$ abgezogen, an dem Uebrigen aber wird die Rechnung auf die in der Gleichung angezeigte Weise vollzogen. Das zweite Glied für die Aenderung der Rectascension, als von $\sin\alpha$ und $\tan\beta$ abhängig, wird für die nördl. Sterne im ersten und zweiten Quadranten von α positiv; für die nördlichen Sterne hingegen im dritten und vierten Quadranten von α negativ seyn. Für die südlichen Sterne wird umgekehrt dieses Glied im ersten und zweiten Quadranten von α negativ, im dritten und vierten aber positiv vorkommen. Die Gleichungen [x], [x′] sind von sehr großem Nutzen, sowohl bei der Construction der Sternverzeichnisse, als auch bei vielen anderen Fällen; wenn man aus der Veränderung der einen Lage des Gestirns die Veränderung einer anderen Lage desselben suchen will. Das Vorstehende soll nun durch ein Beispiel am Arctur und Sirius erläutert werden.

Die Rechnung für den Arctur. $\alpha = 211° 51' 45''$; $+\beta = 20° 7' 28''$, $d\lambda = 50'',1$

l. dλ = 1,6998377 + ...	l. dλ = 1,6998377 +
l. cos α = 9,9290700 —	l. sin α = 9,7225373 —
l. sin ω = 9,6000890 + ...	l. sin ω = 9,6000890 +
l. dβ = 1,2289967 — 17″ .	l. tang β = 9,5639932 +
	0,5864572 — 3″,858.

$$\begin{aligned}
\text{l. } d\lambda &= 1{,}6998377 + \\
\text{l. } \cos\omega &= 9{,}9625130 + \\
\text{l. } d\lambda.\ \cos\omega &= 1{,}6623507;\quad 45'',957
\end{aligned}$$

$0'',142$

für alle Sterne. $+45'',815$

$-3'',858$

$d\alpha = 41'',957$

Es beträgt demnach die jährliche Aenderung des Arcturs: $d\beta = -17''$, für die Declination; $d\alpha = 42''$, für die Rectascension.

Die Rechnung für den Sirius $\alpha = 99^\circ\,18'\,18''$; $\beta = -(16^\circ\,28'\,33'')$; $d\lambda = 50'',1$; $d\lambda \cos\omega = 45'',815$

$$\begin{array}{llll}
\text{l. } d\lambda = 1{,}6998377 + & \ldots\ldots & \text{l. } d\lambda = 1{,}6998377 + & \\
\text{l. } \cos\alpha = 9{,}2086830 - & \ldots\ldots & \text{l. } \sin\alpha = 9{,}9942475 + & \\
\text{l. } \sin\omega = 9{,}6000890 + & \ldots\ldots & \text{l. } \sin\omega = 9{,}6000890 + & \\
\text{l. } d\beta = 0{,}5085097 - & \ldots & \text{l. tang } \beta = 9{,}4709315 - & \\
 & & 0{,}7651057 - & 5'',822
\end{array}$$

$-d\beta = +3'',225$ für die Aenderung der Declination.

$45'',815$

$-5'',822$

$39'',993$

$d\alpha = 40''$, für die Aenderung der Rectascension.

Der Positionswinkel und dessen Aenderung.

§. 30.

Der Positionswinkel C im Dreiecke ABC (Fig. 6.) zeigt den Ort des Gestirns gegen den Aequator und gegen die Ecliptik zugleich; wir erhalten denselben aus der Fundamentalgleichung

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a.\ \cos b}{\sin a.\ \sin b}$$

$$= \frac{\cos\omega - \sin\gamma.\ \sin\beta}{\cos\gamma.\ \cos\beta};$$

oder es kann derselbe auch noch aus der ersten Hauptgleichung [2] §. 3. erhalten werden; man hat nämlich

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b},$$

das heißt:

$$\sin C = \frac{\sin\omega . \cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\sin\omega . \cos\lambda}{\cos\beta}$$ für den Positionswinkel. [1]

Die Auffindung des Ausdrucks für die Veränderung des Positionswinkels, in welchem weder die Länge noch die Breite vorkäme, ist ziemlich verwickelt. Hier wurde dieser Ausdruck doch aus dem Vorhergehenden auf eine ziemlich einfache Weise abgeleitet. Differentiirt man die Gleichung $\sin C = \frac{\sin\omega . \cos\alpha}{\cos\gamma}$, indem γ als constant gesetzt wird:

$$dC . \cos C = - \frac{\sin\omega . \sin\alpha}{\cos\gamma} d\alpha;$$

$$dC = - \frac{\sin\omega . \sin\alpha . d\alpha}{\cos C . \cos\gamma};$$

$$\cos C . \cos\gamma = \frac{\cos\omega - \sin\gamma . \sin\beta}{\cos\beta}.$$

Setzt man $\sin\gamma = \cos\omega . \sin\beta - \sin\omega . \sin\alpha . \cos\beta$ nach §. 27., $d\alpha = d\lambda(\cos\omega + \sin\omega . \sin\alpha . \tang\beta)$ nach [x'] §. 29.: so erhält man

$$dC = - \frac{\sin\omega . \sin\alpha}{\cos\beta}$$ $d\lambda$ für die Aenderung des Positionswinkels.

$l. d\lambda = 1{,}6998377 +$
$l. \sin\omega = 9{,}6000890 +$
l. des gemeinsch. Factors $= 1{,}2999267 +$

Für den Arctur $l. d\lambda . \sin\omega = 1{,}2999267 +$
$l. \sin\alpha = 9{,}7225373 -$
$Comp. l. \cos\beta = 0{,}0273587 +$
$l. dC = 1{,}0498227 - \quad 11'',215$
$dC = + 11'',215.$

Für den Sirius $l. d\lambda. \sin\omega = 1{,}2999267 +$
$l. \sin\alpha = 9{,}9942475 +$
$\text{Comp. } l. \cos\beta = 0{,}0182088 +$
$l. dC = 1{,}3123830 + \; 20'',53$
$dC = -20'',53.$

Lage des Zeniths gegen den Aequator und gegen die Ecliptik.

§. 31.

Das Zenith und der Weltpol befinden sich stets auf dem Meridian irgend eines Orts der Erde; aber der Pol der Ecliptik, als ein Punct des Polarkreises, rückt eben so vom Meridian herunter und über denselben hinaus, wie die Puncte der übrigen Parallelkreise, welche von den Sternen bei ihrem täglichen Laufe beschrieben werden. Rückt der Pol der Ecliptik vom Meridian herunter, indem er sich auf der östlichen Seite desselben befindet, so schiebt sich die Ecliptik, die dann eine schiefe Lage gegen den Aequator und gegen den Horizont bekommt, auf der einen Seite nach Süden unter den Aequator, auf der andern Seite hingegen erhebt sie sich nach Norden über denselben; der Meridian, der zu dieser Zeit die über dem Horizont liegende Ecliptik schneidet, theilt dieselbe nicht mehr in zwei gleiche Theile, und der Punct der Ecliptik, der sich auf dem Meridian befindet, ist nun nicht mehr der Mittelpunct zwischen ihrem Auf- und Untergangspuncte. Anders aber verhält sich die Sache mit dem Aequator; da sein Pol nie vom Meridian herunterrückt, so trifft derselbe senkrecht den Aequator und alle Tagekreise der Gestirne, und theilt sie in zwei gleiche Theile, das heißt, der östliche Bogen ist genau dem westlichen gleich, und während des Durchgangs des Gestirns durch den Meridian, befindet sich dasselbe an einem Puncte des Himmels, den man die Mitte zwischen einem Auf- und Untergange nennt. Und deshalb nannten auch

die Alten den culminirenden Punct des Aequators die gerade Aufsteigung der Mitte des Himmels (**Ascensio recta medii coeli**); es ist dieß demnach der Punct des Aequators, der sich mit dem Scheitelpuncte oder Zenith eines Orts auf dem Meridian zugleich befindet; es ist dieß noch der Stundenwinkel des Aequinoctialpuncts, von welchem man die Länge und die gerade Aufsteigung der Gestirne zählt; es ist dieß zugleich die gerade Aufsteigung des Zeniths; da sich aber das Zenith weder senkt noch hebt, so wurde die letzte Benennung nicht angenommen; es ist dieß ferner die Lage des Aequinoctialpuncts gegen das Zenith, überhaupt ist dieß die in den Bogen des Aequators verwandelte Sternzeit (**Tempus sidereum**). Alle diese Benennungen, welche die gerade Aufsteigung der Mitte des Himmels erhalten kann, muß man sich genau merken. Hier soll dieselbe immer mit M bezeichnet werden; aus der Astronomie weiß man, daß

$M = AR\odot +$ wahre Zeit im Bogen ausgedrückt.

Da nun aber die Astronomen den Tag vom Mittage anfangen zu zählen, so ist die wahre Zeit nach dem Mittage der Stundenwinkel der Sonne; früh aber, oder vor dem Mittage, ist der Stundenwinkel der Sonne die Ergänzung der wahren Zeit zu 24 Stunden; wird also der Stundenwinkel der Sonne P genannt, und M durch denselben ausgedrückt: so erhält man

$M = AR\odot + P$ für die Zeit nach dem Mittage,
$M = AR\odot - P$ für die Zeit vor dem Mittage. [p]

Die Zeichen des Thierkreises folgen in der Ordnung von Westen nach Osten auf einander, und in derselben Richtung werden auch die Rectascensionen der Sonne und der Sterne gezählt. Wenn wir M durch die gerade Aufsteigung der Sonne ausdrücken, so ist immer darunter die gerade Aufsteigung für die Zeit der Rechnung, das heißt: der wahren Zeit entsprechend, zu verstehen.

Die Abweichung des Zeniths oder die Entfernung desselben vom Aequator ist die geographische Breite des Orts selbst; es giebt demnach die geographische Breite eines Orts *H*, und die gerade Aufsteigung der Mitte des Himmels M, für jeden Augenblick die Lage des Zeniths gegen den Aequator an.

Da nun aber, wie bereits bemerkt wurde, wenn der Pol der Ecliptik vom Meridian herunterrückt, der culminirende Punct der Ecliptik nicht in der Mitte zwischen dem Auf- und Untergangspuncte derselben liegt: so mußte man sich bemühen, diesen Punct für jeden Augenblick genau zu bestimmen. Das eben Gesagte wird durch den Bogen des größten Kreises, welchen man durch den Pol der Ecliptik und durch das Zenith zieht, und welcher mithin sowohl senkrecht auf die Ecliptik als auf den Horizont ist, bewerkstelligt. Der genannte größte Kreis ist Höhen- und Breitenkreis zugleich; und denjenigen Punct der Ecliptik, wo dieselbe von diesem größten Kreise getroffen wird, nannte man den Nonagesimus oder den neunzigsten Punct, weil nämlich derselbe 90° sowohl vom Auf- als Untergangspuncte der Ecliptik absteht; und mithin den Mittelpunct des über dem Horizont liegenden Theiles der Ecliptik angiebt. Hierdurch wird also, wie ganz deutlich erhellt, die Lage des Zeniths gegen die Ecliptik durch die Länge und Breite ausgedrückt. Die Bestimmung dieses Punctes für jeden gegebenen Augenblick ist von großem Nutzen in der Astronomie, vorzüglich bei der Berechnung der Parallaxen und Verfinsterungen. Wir wollen nun immer die Länge des Nonagesimus oder des Zeniths mit N, die Breite des Nonagesimus oder des Zeniths mit s, die Höhe desselben mit k bezeichnen.

Es stelle (Fig. 7. Tab. II.) PMBC den Meridian vor; B das Zenith; C den Weltpol; A den Pol der Ecliptik. PORQ ist der Horizont; V ein Aequinoctialpunct; VMTR der Aequator; VNSQ die Ecliptik. VM ist die gerade Aufsteigung

der Mitte des Himmels $= M$; r aber der culminirende, oder der durch den Meridian gehende Punct der Ecliptik; N ist der Nonagesimus, weil nämlich $NQ = 90°$. Aus der Lehre über die Sphäre wissen wir, daß $ABN = 90°$, $BNO = 90°$; also $AB = NO$, $BAL = 90°$, $ABN = 90°$; und also $BN = AL$, oder gleich der Erhöhung des Pols der Ecliptik über dem Horizont ist: $POR = 90°$, $ORQ = 90°$; also auch $PO = RQ$. Der Punct Q ist der Pol des Kreises ABNO, der sowohl Breiten- als Höhenkreis ist; der Winkel NQO, oder der Bogen NO, heißt der Angulus orientis, oder der Winkel der aufgehenden Ecliptik. VN ist die Länge des Zeniths oder des Nonagesimus $= N$, BN die Breite des Zeniths $= s$.

Im Dreiecke ABC ist b die Schiefe der Ecliptik $= \omega$;

$$b = \omega; \quad \angle A = NS = 90° - VN = 90° - N;$$
$$a = 90° - H; \quad \angle B = PO = RQ;$$
$$c = 90° - s; \quad \angle ACB = 180° - BCS = 180° - MT = 90° + M.$$

Nach der dritten Hauptgleichung haben wir:

$$\text{cotg}\, a.\ \sin b = \cos b.\ \cos C + \sin C.\ \text{cotg}\, A;$$

das giebt in der gegenwärtigen Bedeutung der Seiten und Winkel

$$\text{tang}\, H.\ \sin\omega = -\cos\omega.\ \sin M + \cos M.\ \text{tang}\, N;$$

und also

$$\text{tang}\, N = \left.\frac{\text{tang}\, H.\ \sin\omega}{\cos M}\right\} + \cos\omega.\ \text{tang}\, M \quad [m]$$ für die Länge des Nonagesimus.

Und setzt man

$$\frac{\text{tang}\, H}{\sin M} = \text{cotg}\,\varphi, \text{ oder } \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin M}{\text{tang}\, H}:$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\, M}{\sin\varphi} \sin(\varphi + \omega). \quad [m']$$

Indessen giebt es Fälle, bei welchen es rathsamer ist, die Gleichung [m] zu gebrauchen, besonders wo der Zweifel vor-

käme, zu welchem Quadranten der Hülfswinkel φ gehöre? denn der unrichtige Gebrauch dieses Winkels könnte zu irrigen Resultaten führen.

Kennt man M, N: so findet man mittelst der ersten Hauptgleichung s, das heißt: die Breite des Zeniths oder des Nonagesimus.

$$\sin A : \sin a = \sin C : \sin c; \quad \sin c = \cos s, \text{ also}$$

$$\cos s = \frac{\cos M. \cos H}{\cos N} \quad [n]$$ für die Breite des Zeniths oder des Nonagesimus.

Diese Breite des Zeniths kann auch noch aus der Fundamentalgleichung erhalten werden:

$$\cos c = \cos C. \sin a. \sin b + \cos a. \cos b;$$

das ist

$$\sin s = -\sin M. \cos H. \sin \omega + \sin H. \cos \omega. \quad [n']$$

Weil nun aber die Breite des Zeniths die Ergänzung von NO, d. h.: von der Höhe des Zeniths ist, und also auch von dem Winkel der aufgehenden Ecliptik Q: so erhält man, wenn diese Höhe mit k bezeichnet wird, $k = 90° - s$, $\sin s = \cos k$ und $\cos s = \sin k$. Noch ist die Breite s der Erhöhung des Pols der Ecliptik AL gleich.

$$\sin c : \sin C = \sin b : \sin B,$$

$$\sin B = \sin RQ = \frac{\sin \omega. \cos M}{\cos s} \quad [o]$$ für die Weite des aufgehenden Punctes der Ecliptik.

Noch kann B durch die dritte Hauptgleichung gefunden werden:

$$\text{cotg}\, b. \sin a = \cos a. \cos C + \sin C. \text{cotg}\, B;$$

und folglich

$$\text{cotg}\, B = \frac{\text{cotg}\, \omega. \cos H}{\cos M} + \sin H. \text{tang}\, M$$

$$= \text{tang}\, M \left(\sin H + \frac{\text{cotg}\, \omega}{\sin M} \cos H\right);$$

und setzt man

$$\frac{\cot g\,\omega}{\sin M} = \tan g\,\varphi':$$

so erhält man

$$\cot g\,B = \frac{\tan g\,M}{\cos\varphi'} \sin(\varphi' + H). \quad [o']$$

Eine Gleichung kann zur Prüfung der erhaltenen Resultate aus der andern dienen.

Der Punct r ist der durch den Meridian gehende, oder culminirende Punct der Ecliptik: Vr dessen Länge, Mr dessen Declination; der Winkel VrM ist der Winkel der Ecliptik mit dem Meridian, den man bei der Berechnung der Verfinsterungen gebraucht; der Winkel V = ω ist die Schiefe der Ecliptik. In dem bei M rechtwinkligen Dreiecke VrM ist nach §. 9.

[e] $\tan g\,Vr = \frac{\tan g\,M}{\cos\omega}$ } für die Länge des culminirenden Punctes der Ecliptik.

[d] $\cos VrM = \cos M.\ \sin\omega$; für den Winkel der Ecliptik mit dem Meridian.

[f] $\tan g\,Mr = \tan g\,\omega.\ \sin M$; für die Declination des culminirenden Punctes der Ecliptik.

Pr ist die Höhe des culminirenden Punctes der Ecliptik $= 90^\circ - H + Mr$.

Beispiel. Den 7. September 1820 n. S. um $2^h 29' 23''$ wahre Zeit in Wilna, soll man M, N, s, und alle eben auseinandergesetzte Bogen und Winkel für den Anfang der Sonnenfinsterniß, mit Rücksicht auf die wahre Gestalt der Erde $= \frac{1}{310}$ oder $\frac{1}{330}$, finden; wird die letztere angenommen: so ist die corrigirte Breite von Wilna $= 54^\circ 31' 10''$, $\omega = 23^\circ 27' 55'',7$.

In Wilna die Rectascension der Sonne, oder

$$\alpha = 165^\circ 57' 39'',69$$

$2^h 29' 23''$ im Bogen $= 37^\circ 20' 45''$

$$M = 203^\circ 18' 24'',69$$

$$= 180^\circ + 23^\circ 18' 24'',69.$$

N, ohne den Hülfswinkel berechnet.

$$
\begin{aligned}
\text{l. tang } H &= 0{,}1470438 + \\
\text{l. sin } \omega &= 9{,}6000972 + \\
\text{Comp. l. cos M} &= 0{,}0369686 - \\
\text{l. (1)} &\quad 9{,}7841096 - \\
&\quad -0{,}608288 \ (1) \\
\text{l. cos } \omega &= 9{,}9625115 + \\
\text{l. tang M} &= 9{,}6342857 + \\
\text{l. (2)} &\quad 9{,}5967972 + \\
&\quad 0{,}395184 \ (2) \\
(1)+(2) &= -0{,}213104 = \text{tang N}
\end{aligned}
$$

$N = 167^\circ\, 58'\, 12''$ die Länge des Zeniths.

N, mit dem Hülfswinkel.

$$
\begin{aligned}
\text{l. sin M} &= 9{,}5973171 - \\
\text{l. tang } H &= 0{,}1470438 + \\
\text{l. tang } \varphi &= 9{,}4502733 - \text{ im 4. Quadr.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 360^\circ - (15^\circ\, 44'\, 57'',4) \\
&= 344^\circ\, 15'\, 2'',6 \\
\omega &= 23^\circ\, 27'\, 55'',7 \\
\varphi + \omega &= 7^\circ\, 42'\, 58'',3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{l. tang M} &= 9{,}6342857 + \\
\text{l. sin } (\varphi+\omega) &= 9{,}1279670 + \\
\text{Comp. l. sin } \varphi &= 0{,}5663448 - \\
\text{l. tang N} &= 9{,}3285975 - \\
\text{N} &= 180^\circ - (12^\circ\, 1'\, 48'').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{l. cos M} &= 9{,}9630314 - \\
\text{l. cos } H &= 9{,}7637473 + \\
\text{Comp. l. cos N} &= 0{,}0096440 - \\
\text{l. cos s} &= 9{,}7364227 +
\end{aligned}
$$

$s = 56^\circ\, 58'\, 23''$ die Breite des Zeniths.

$90^\circ - s = 33^\circ\, 1'\, 37''$ die Höhe des Zeniths und der Winkel der aufgehenden Ecliptik.

$$\text{l. cos M} = 9{,}9630314 -$$
$$\text{l. sin } \omega = 9{,}6000972 +$$
$$\text{Comp. l. cos s} = 0{,}2635773 +$$
$$\text{l. sin B} = 9{,}8267059 -$$

$B = -(42^\circ 8' 32'')$ = der Weite des untergehenden Punctes der Ecliptik.

B = nach der Gleichung [o']

$$\text{l. cotg } \omega = 0{,}3624143 +$$
$$\text{l. sin M} = 9{,}5973171 -$$
$$\text{l. tang } \varphi' = 0{,}7650972 - \text{ im 2. Quadr.}$$
$$\varphi' = 180^\circ - (80^\circ 15' 15'',8)$$
$$= 99^\circ 44' 44'',2$$
$$H = 54^\circ 31' 10''$$
$$\varphi' + H = 154^\circ 15' 54'',2$$

$$\text{l. tang M} = 9{,}6342857 +$$
$$\text{l. sin } (\varphi' + H) = 9{,}6376984 +$$
$$\text{Comp. l. cos } \varphi' = 0{,}7714097 -$$
$$\text{l. cotg B} = 0{,}0433938 -$$
$$B = -(42^\circ 8' 32'')$$
$$\text{l. tang M} = 9{,}6342857 +$$
$$\text{l. cos } \omega = 9{,}9625115 +$$
$$\text{l. tang Vr} = 9{,}6717742 +$$

$Vr = 180^\circ + 25^\circ 9' 25'',5$ denn M ist im 3. Quadr. Die Länge des culminirenden Punctes der Ecliptik.

$$\text{l. tang } \omega = 9{,}6375857 +$$
$$\text{l. sin M} = 9{,}5973171 -$$
$$\text{l. tang Mr} = 9{,}2349028 -$$

$Mr = -(9^\circ 44' 44'')$. Die südliche Declination des culminirenden Punctes der Ecliptik.

$$\text{l. cos M} = 9{,}9630314 -$$
$$\text{l. sin } \omega = 9{,}6000972 +$$
$$\text{l. cos VrM} = 9{,}5631286 -$$

$VrM = 180^\circ - (68^\circ 32' 57'')$. Der Winkel der Ecliptik mit

dem Meridian auf der Südseite von West; folglich nach der Nordseite 68° 32′ 57″.

Pr die Höhe des culminirenden Punctes der Ecliptik = 90° — *H* + Mr.

III.

Beziehung der Himmelskörper auf den Mittelpunct der Erde, oder auf den Mittelpunct der Sonne.

Verwandlung der geocentrischen Oerter in die heliocentrischen.

§. 32.

Die beweglichen zur Sonnenwelt gehörenden Himmelskörper, wie die Planeten und Kometen, werden von verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erde aus beobachtet; aber auf einen gemeinschaftlichen Punct, nämlich auf den Mittelpunct der Erde, bezogen. Die Bahn und Lage eines Himmelskörpers, so wie sie einem Beobachter aus dem Mittelpuncte der Erde erscheinen müßte, heißt die geocentrische (Locus geocentricus). Da sich nun aber die Planeten und Kometen nicht um die Erde, sondern um die Sonne bewegen; so ist die aus dem Mittelpuncte der Erde gesehene Bahn und Lage des Planeten oder Kometen nicht die wahre, sondern nur die scheinbare Bahn; will man demnach von der scheinbaren Bahn und Lage zu der wahren übergehen, so muß man diese Bahnen auf ihren wirklichen Mittelpunct, nämlich auf den Mittelpunct der Sonne, reduciren. Die Bahn und Lage eines Himmelskörpers, so wie sie dem Beobachter aus dem Mittelpuncte der Sonne erscheinen müßte, nennt man die heliocentrische (Locus heliocentricus).

Zur Kenntniß der erstern leiten uns Beobachtungen, zur andern hingegen zuweilen Beobachtungen, öfter aber die Analysis. Es ist deshalb eine der wichtigsten Aufgaben in der Astronomie: aus der geocentrischen Lage die heliocentrische zu finden; und umgekehrt: von der heliocentrischen Lage zur geocentrischen zu gelangen. Die erste Aufgabe haben wir zu lösen, wenn aus den durch die Beobachtung erhaltenen Oertern die wahren durch die Tafeln gegebenen Oerter, zu welchen uns die Lehren der Mechanik leiten, gefunden werden sollen, um auf diese Weise die Beobachtungen mit den Tafeln zu vergleichen. Die andere hingegen, wenn wir die Tafeln durch die Beobachtungen berichtigen wollen und aus den tabellarischen Oertern diejenigen, welche die Beobachtungen zeigen müssen, zu bestimmen wünschen, um zu erfahren, *wie weit die Tafeln für die Bewegungen der Himmelskörper mit den Beobachtungen übereinstimmen?*

Die Auflösung dieser Aufgaben, größtentheils von der Entfernung dreier Himmelskörper von einander, und also von drei geraden Linien abhängig, scheint mehr die Sache der ebenen als der sphärischen Trigonometrie zu seyn. Weil aber die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel als Resultate der sphärischen Trigonometrie erscheinen, so vereinigen sich hier beide Wissenschaften, und unterstützen einander bei der Auflösung dieser Aufgaben.

Die Sonne und die Erde bleiben stets auf der Ebene der Ecliptik, und wir betrachten diese Körper als ohne Breite. Obgleich aber *Laplace* aus der Einwirkung der Planeten eine kleine Veränderung der Ecliptik ableitet, und die Breite der Sonne nahe auf eine Bogensecunde angiebt, so wird dennoch diese so kleine und unbedeutende Veränderung bei trigonometrischen Rechnungen nicht berücksichtigt.

Die Planeten und Kometen bewegen sich in eigenen mehr oder weniger gegen die Ecliptik geneigten Bahnen, die vom

Mittelpuncte eines Planeten auf die Ebene der Ecliptik gefällten Perpendikel zeigen uns die Oerter dieses Planeten auf der Ebene der Ecliptik. Man nennt in der Astronomie die Bewegung eines Planeten rechtläufig (Motus directus), wenn derselbe die Zeichen der Ecliptik in einer solchen Ordnung, wie sie auf einander von Abend gegen Morgen, oder von o♈, d. h. vom Anfangspuncte des Widders folgen, durchläuft. Rückläufig (Motus retrogradus) hingegen wird die Bewegung genannt, wenn der Planet oder Komet in umgekehrter Ordnung, d. h. von Morgen gegen Abend durch die Zeichen der Ecliptik rückt. Macht die Neigung der Planetenbahn mit der Ebene der Ecliptik einen spitzen Winkel, das heißt, einen Winkel, der kleiner als 90° ist: so folgen alle Puncte der von dem Planeten auf die Ebene der Ecliptik gezogenen Senkrechten, in der Ordnung der Zeichen auf einander, und zeigen die rechtläufige Bewegung des Planeten. Macht aber die Neigung der Planetenbahn mit der Ebene der Ecliptik einen stumpfen Winkel: so fallen die Puncte der von dem Planeten auf die Ebene der Ecliptik gezogenen Senkrechten auf die entgegengesetzte Seite, folgen von Morgen gegen Abend auf einander und zeigen die retrograde Bewegung des Planeten.

Es wird denn auch deshalb heut zu Tage in mehreren astronomischen Werken, wenn die rechtläufige oder rückläufige Bewegung angegeben werden soll, dieselbe durch die spitzwinklige oder stumpfwinklige Neigung der Bahn ausgedrückt.

Wenn wir den Planeten oder Kometen auf seiner eigenen Bahn betrachten: so ist die von der Sonne oder Erde bis zu demselben gezogene gerade Linie seine wahre Distanz; wenn aber der Planet oder Komet auf die Ecliptik projicirt wird: so geben die von der Sonne oder Erde zu dem so projicirten Puncte auf die Ecliptik gezogenen geraden Linien die abgekürzte Distanz (Distantia curtata).

Man denke sich (Fig. 8. Tab. II.) den auf die Ebene der Ecliptik projicirten Planeten in P, die Sonne in S, und die Erde in Z: so ist im ebenen Dreiecke PSZ, SZ der wahre Abstand der Erde von der Sonne, SP die abgekürzte Distanz des Planeten von der Sonne, ZP die abgekürzte Distanz der Erde von dem Planeten. Der Winkel P heißt in der Astronomie die jährliche Parallaxe (Parallaxis annua); es ist dieß der Winkel, unter welchem man aus dem Planeten die Linie SZ, oder den Radius der um die Sonne beschriebenen jährlichen Bahn der Erde sehen würde; wir wollen ihn hier den Winkel im Planeten oder Kometen (kąt w planecie lub komecie) nennen. Der Winkel S heißt in der Astronomie der Commutationswinkel, hier soll er der Winkel in der Sonne (kąt w słońcu) genannt werden; unter diesem Winkel würden wir aus dem Mittelpuncte der Sonne die Erde und den Planeten, oder den Abstand PZ der Erde vom Planeten sehen. Endlich heißt der Winkel Z, oder der aus dem Mittelpuncte der Erde gesehene Abstand SP des Planeten von der Sonne, die Elongation; hier soll er der Winkel am Mittelpuncte der Erde (kąt w ziemi) genannt werden. Mit Recht betrachtet Delambre die drei genannten Winkel als drei Parallaxen. Parallaxe, ein griechisches Wort, heißt Veränderung, und in der Astronomie zeigt es auch wirklich die aus zwei verschiedenen Puncten gesehene Veränderung eines Orts an.

Es heiße, wie bisher, die geocentrische Länge
des Himmelskörpers . . . . λ,
die geocentrische Breite . . . . γ,
die heliocentrische Länge . . . . l,
die heliocentrische Breite . . . . p,
die heliocentrische Länge der Erde . . . . L,
die Distanz der Sonne von der Erde . . . . R,
die wahre Distanz des Planeten von der Sonne . . . r,
die abgekürzte Distanz des Planeten von der Sonne . . r′,

die wahre Distanz des Planeten von der Erde . . . . Δ,
die abgekürzte Distanz des Planeten von der Erde . . . Δ'.

Aus der Astronomie weiß man, daß der Winkel im Planeten $P = \lambda - l$, der Winkel in der Sonne $S = l - L$, der Winkel am Mittelpuncte der Erde Z, oder dessen Ergänzung zu $180^\circ, = \lambda - L$ ist.

$$\sin(\lambda - l) : \sin(\lambda - L) = R : r';$$

also:

$$\sin(\lambda - l) = \frac{R}{r'} \sin(\lambda - L) \quad [1]$$

$\lambda - (\lambda - l) = l$ ist die aus dem Mittelpuncte der Sonne gesehene oder heliocentrische Länge des Planeten.

$$\sin(l - L) : \sin(\lambda - l) = \Delta' : R,$$

und folglich

$$\left.\Delta' = R \frac{\sin(l - L)}{\sin(\lambda - l)}\right\} \quad [2]$$ die abgekürzte Distanz des Planeten von der Erde.

Es sey (Fig. 9. Tab. II.) P' der Ort des Planeten oder Kometen auf seiner eigenen Bahn, P aber der projicirte Ort desselben auf die Ecliptik; S der Ort der Sonne, Z der Ort der Erde: so ist

$$SP' = r, \quad ZP' = \Delta, \quad P'SP = p;$$
$$SP = r', \quad ZP = \Delta', \quad P'ZP = \gamma;$$

und hieraus erhält man sofort folgende Gleichungen:

$$r' = r \cos p, \quad \Delta' = \Delta \cos \gamma \quad [3]$$

$$\operatorname{tang} p = \frac{P'P}{r'}, \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{P'P}{\Delta'};$$

und folglich

$$\frac{\operatorname{tang} p}{\operatorname{tang} \gamma} = \frac{\Delta'}{r'}, \quad \operatorname{tang} p = \frac{\Delta'}{r'} \operatorname{tang} \gamma, \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{r'}{\Delta'} \operatorname{tang} p. \quad [4]$$

Die Gleichungen [1], [2], [3], [4] lösen uns die Aufgabe: wie, wenn der geocentrische Ort eines Planeten oder Kometen, oder dessen Lage in Beziehung auf den Mittelpunct der Erde gegeben ist, der heliocentrische Ort desselben, oder des-

sen Lage in Beziehung auf den Mittelpunct der Sonne, gefunden werden kann; denn die Gleichung [1] giebt die heliocentrische Länge des Planeten; die Gleichung [2] die abgekürzte Distanz des Planeten von der Erde; die Gleichung [3] lehrt: wie aus der abgekürzten Distanz die wahre, oder aus der wahren die abgekürzte gefunden werden kann; die Gleichung [4] aber wie die geocentrische Breite in die heliocentrische verwandelt wird. Ueberhaupt gelangen wir durch die vorstehenden Gleichungen, wo die Länge der Erde = der Länge der Sonne $+180^\circ$, als bekannt vorausgesetzt wird; von der Lage des Planeten in Beziehung auf den Mittelpunct der Erde, zu der Lage desselben in Beziehung auf den Mittelpunct der Sonne.

Beispiel. Den 3. September 1818 n. S. war die geocentrische Länge des Saturns $\lambda = 11^z 15^\circ 9' 8'', 8$, die geocentrische Breite $\gamma = 2^\circ 12' 33'', 6$ südlich. Die Länge der Erde $L = 11^z 10^\circ 46' 13''$. Die Entfernung der Erde von der Sonne $R = 1{,}00796$, $l. R = 0{,}0034459$. Die abgekürzte Distanz des Saturns von der Sonne $r' = 9{,}6636$, $l. r' = 0{,}9851402$. Wie war seine Lage in Beziehung auf den Mittelpunct der Sonne?

$$\lambda - L = 4^\circ 22' 55'', 8$$

$$\begin{aligned} l.\, R &= 0{,}0034459 + \\ l. \sin(\lambda - L) &= 8{,}8831427 + \\ \text{Comp. } l.\, r' &= \underline{9{,}0148598 +} \\ l. \sin(\lambda - l) &= 7{,}9014484 + \quad \lambda - l = 27' 24''. \end{aligned}$$

$\lambda - (\lambda - l) = 11^z 14^\circ 41' 44'', 8 = l$, die heliocentr. Länge des Saturns; $11^z 10^\circ 46' 13'' = L$;

$$l. - L = 3^\circ 55' 31'', 8.$$

$$\begin{aligned} l.\, R &= 0{,}0034459 + \\ l. \sin(l - L) &= 8{,}8354387 + \\ \text{Comp. } l. \sin(\lambda - l) &= \underline{2{,}0985516 +} \\ l.\, \Delta' &= 0{,}9374362 + \end{aligned}$$

$\Delta' = 8{,}6583$*) die abgekürzte Distanz des Saturns von der Erde.

$$
\begin{aligned}
\text{l. } \Delta' &= 0{,}9374362 + \\
\text{l. tang } \gamma &= 8{,}5863537 - \\
\text{Comp. l. r}' &= 9{,}0148598 + \\
\hline
\text{l. tang p} &= 8{,}5386497 -
\end{aligned}
$$

$p = 1^\circ\, 58'\, 47''$ die heliocentrische Breite des Saturns, südlich.

$$
\begin{aligned}
\text{l. r}' &= 0{,}9851402 + \\
\text{l. cos p} &= 9{,}9997407 + \\
\hline
\text{l. r} &= 0{,}9853995 +
\end{aligned}
$$

$r = 9{,}6694$ der wahre Abstand des Saturns von der Sonne.

Verwandlung der heliocentrischen Oerter in die geocentrischen.

§. 33.

Man denke sich (Fig. 10. Tab. II.) in **Z** den Planeten oder Kometen auf seiner eigenen Bahn. Es stelle die Ebene der Tafel die Ebene der Ecliptik vor, auf welche wir durch die auf die Ebene der Ecliptik senkrechte Linie **ZC** den Planeten beziehen wollen. **S** sey der Ort der Sonne, **T** aber der Ort der Erde. Nun denke man sich noch zwei Ebenen durch den Mittelpunct der Sonne, welche sich in demselben unter einem rechten Winkel durchschneiden, und eine senkrechte Lage gegen die Ebene der Ecliptik haben, gelegt; die eine dieser Ebenen schneide die Ecliptik in der Richtung **SN**, die andere aber in der Richtung **SR**. Aehnliche parallele Ebenen zu den zwei genannten werden auch noch durch den Mittelpunct der Erde **T** gelegt. Die drei rechtwinkligen Coordinaten **ZC**, **CP**, **PS** be-

---

*) Anmerkung. Im Original ist hier ein Druckfehler; es steht nämlich da: $\Delta' = 8{,}66582$. Derselbe Druckfehler kommt auch in dem Beispiele des folgenden §. vor. [F]

stimmen die Lage des Planeten oder Kometen gegen die Sonne; die drei rechtwinkligen Coordinaten ZC, Cp, Tp hingegen die Lage des Planeten oder Kometen gegen die Erde; durch die ersteren wird die heliocentrische, durch die anderen die geocentrische Lage erhalten. Um aber diesen Coordinaten die gewöhnlichen astronomischen Benennungen beizulegen: so denke man sich noch eine Ebene ebenfalls senkrecht auf die Ebene der Ecliptik durch den Mittelpunct der Sonne S, und durch die Aequinoctialpuncte ♈ ♎ gelegt; denn von einem dieser Puncte, d. i. von ♈ werden die Längen der Himmelskörper gerechnet; es wird also die Linie S♈ der Anfang der heliocentrischen Längen seyn. Weil nun aber die Entfernung der Fixsterne, bis zu welchen sich die Ecliptik erstreckt, in Beziehung auf die ganze Sonnenwelt, unermeßlich und beinahe unendlich ist: so geht eine ähnliche Ebene, parallel mit jener und durch den Mittelpunct der Erde gedacht, ebenfalls durch die Aequinoctialpuncte ♎T♈: und es wird die Linie T♈ der Anfang der geocentrischen Längen seyn. Es ist demnach die heliocentrische Länge der Ebene SN, der Winkel ♈SN = E, die heliocentrische Länge der Ebene SR = 90° + E; die heliocentrische Länge des Planeten C ist CS♈ = l; die heliocentrische Breite von C ist ZSC = p; die heliocentrische Länge der Erde TS♈ = L; die geocentrische Länge des Planeten C ist der Winkel CT♈ = λ; die geocentrische Breite von C ist ZTC = γ; ST = R, SZ = r; CS = r′, TZ = Δ, CT = Δ' nach der in §. 32. angedeuteten Bezeichnung. Bestimmen wir nun SQ, QT, und sowohl die heliocentr. Coordinaten ZC, CP, PS, als die geocentrischen ZC, Cp, pT: so ist

$$SP = SC. \cos CSN = r' \cos(l - E);$$

$$PC = SC. \sin CSN = r' \sin(l - E);$$

$$SQ = ST. \cos TSQ = R. \cos(L - E);$$

$$TQ = R \sin(L - E);$$

$$Tp = \Delta' \cos(\lambda - E);$$

$$pC = \Delta' \sin(\lambda - E).$$

Zwischen der heliocentrischen und geocentrischen Lage haben wir folgende Gleichungen:

$$Tp = SP - SQ, \quad pC = PC - QT;$$

das heißt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \cos(\lambda - E) &= r' \cos(l - E) - R \cos(L - E) \\ \Delta' \sin(\lambda - E) &= r' \sin(l - E) - R \sin(L - E). \end{aligned}\right\} \quad [N]$$

Und aus den vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$\operatorname{tang}(\lambda - E) = \frac{r' \sin(l - E) - R. \sin(L - E)}{r' \cos(l - E) - R. \cos(L - E)}. \quad [q]$$

Da nun aber die Richtung der Ebene SN, und also der Winkel E nach Belieben angenommen werden kann: so sey $E = \frac{1}{2}(l + L)$; und die Gleichung [q] verwandelt sich in folgende:

$$\operatorname{tang}[\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)] = \frac{r' \sin\frac{1}{2}(l - L) - R. \sin\frac{1}{2}(L - l)}{r' \cos\frac{1}{2}(l - L) - R. \cos\frac{1}{2}(L - l)}$$

$$= \frac{r' + R}{r' - R} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l - L), \quad [q']$$

weil

$$-\sin\tfrac{1}{2}(L - l) = + \sin\tfrac{1}{2}(l - L);$$

$$-\cos\tfrac{1}{2}(L - l) = - \cos\tfrac{1}{2}(l - L).$$

Setzt man jetzt $\frac{R}{r'} = \operatorname{tang}\psi$, da $\operatorname{tang} 45^0 = 1$,

$$\frac{r' + R}{r' - R} = \operatorname{tang}(45^0 + \psi) \text{ §. 13. II.:}$$

so ist

$$\operatorname{tang}[\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)] = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l - L) \operatorname{tang}(45^0 + \psi); \quad [q'']$$

nun sind l, L bekannte Größen, λ aber unbekannt; es ist demnach $\lambda - \frac{1}{2}(l + L) + \frac{1}{2}(l + L) = \lambda$ die geocentrische Länge. Noch folgt aus den Gleichungen [N]

$$\Delta' = \frac{r' \cos\frac{1}{2}(l - L) - R. \cos\frac{1}{2}(L - l)}{\cos[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}$$

$$= \frac{(r' - R) \cos\frac{1}{2}(l - L)}{\cos[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}, \quad [h]$$

oder

$$\Delta' = \frac{r' \sin\frac{1}{2}(l - L) - R.\ \sin\frac{1}{2}(L - l)}{\sin[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}$$

$$= \frac{(r' + R)\sin\frac{1}{2}(l - L)}{\sin[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}. \quad [h']$$

Die Gleichung [4] §. 32. giebt für die geocentrische Breite

$$\tang \gamma = \frac{r'}{\Delta'} \tang p. \quad [i]$$

Man erhält also durch die Gleichung [q''] die geocentrische Länge λ; durch die Gleichung [h] oder [h'] die abgekürzte Distanz des Planeten von der Erde; durch die Gleichung [i] die geocentrische Breite γ; und die Aufgabe ist vollständig gelös't.

Beispiel. Für den 3. September 1818 n. S. geben die Saturnstafeln die heliocentrische Länge des Saturns $l = 11^z 14^\circ 41' 44'',8$; dessen südliche Breite $p = 1^\circ 58' 47''$; den wahren Abstand desselben von der Sonne $r = 9,6694$. Die Sonnentafeln hingegen geben die Länge der Erde $L = 11^z 10^\circ 46' 12''$. Die Entfernung der Erde von der Sonne $R = 1,00796$, $l.\ R = 0,0034459$. Wie groß war zu der Zeit die geocentrische Länge λ, die geocentrische Breite γ des Saturns, dessen abgekürzte Distanz von der Sonne r' und von der Erde Δ'?

$\frac{1}{2}(l + L) = 11^z 12^\circ 43' 58'',4$; $\frac{1}{2}(l - L) = 1^\circ 57' 46'',4$:

$l.\ r = 0,9853995 +$ . . . . $l.\ R = 0,0034459 +$
$l.\ \cos p = 9,9997407 +$ . . . . $l.\ r' = 0,9851402 +$
$l.\ r' = 0,9851402 +$ $\quad$ $l.\ \tang \psi = 9,0183057 +$
$r' = 9,6636$ $\quad$ $\psi = 5^\circ 57' 17''$.

$$l.\ \tang(45^\circ + \psi) = 0,0909290 +$$
$$l.\ \tang\frac{1}{2}(l - L) = 8,5349429 +$$
$$l.\ \tang[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)] = 8,6258721 +$$
$$\lambda - \frac{1}{2}(l + L) = 2^\circ 25' 10''.$$

9 *

$$\lambda = 11^s\,15^\circ\,9'\,8'',4;\quad R + r' = 10{,}67156:$$

$$
\begin{aligned}
l.\,(R + r') &= 1{,}0282279 +\\
l.\,\sin\tfrac{1}{2}\,(l - L) &= 8{,}5346636 +\\
\text{Comp. } l.\,\sin(2^\circ\,25'\,10'') &= 1{,}3745361 +\\
\hline
l.\,\varDelta' &= 0{,}9374276 +\\
\varDelta' &= 8{,}6583.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l.\,r' &= 0{,}9851402 +\\
l.\,\mathrm{tang}\,p &= 8{,}5386442 -\\
\text{Comp. } l.\,\varDelta' &= 9{,}0625724 +\\
\hline
l.\,\mathrm{tang}\,\gamma &= 8{,}5863568 -\\
\gamma &= 2^\circ 12' 33'',6 \text{ südliche Breite.}
\end{aligned}
$$

Die eben hier auseinandergesetzte Methode, die geocentrischen Oerter in die heliocentrischen, und umgekehrt die heliocentrischen in die geocentrischen zu verwandeln, ist von allen bis jetzt in der Astronomie bekannten die einfachste und kürzeste. Aus der gegebenen geocentrischen Länge und Breite kann man nun mittelst der in §. 28. aufgestellten ziemlich einfachen Gleichungen leicht die Rectascension und Declination des Planeten finden. Dennoch bemühten sich die Analysten, auch Gleichungen, die sogleich, ohne vorher die geocentrische Länge und Breite bestimmt zu haben, von den heliocentrischen Oertern zur Rectascension und Declination führen, anzugeben: wie man dieß an den von Puissant und Delambre aufgestellten Gleichungen *) sehen kann. Diese Kunst erfordert jedoch manchmal weitläuftigere Rechnungen, als die hier auseinandergesetzten, und deshalb ist denn auch dieß Verfahren, als wenig Nutzen der practischen Astronomie bringend, weggeblieben. Man könnte in der Astronomie mehrere Beispiele anführen, daß die Analysis

---

*) Connoissance des tems l'an 1819; die von Puissant angegebenen Gleichungen befinden sich pag. 235, von Delambre aber pag. 278.

oft da zu langwierigen und dunkeln Rechnungen führet, wo die trigonometrische Rechnungsart kurz und einfach ist.

Die Gleichungen [N], aus denen sich gegenwärtige Rechnung ergab, hat Gauß ohne Beweis aufgestellt *); der hier gegebene Beweis ist nach der von Euler eingeführten und mit dem herrlichsten Erfolge von Lagrange**) angewandten Methode, die auch gewöhnlich in der Geometrie der krummen Linien und Mechanik gebraucht wird, abgeleitet. Der noch größere Nutzen dieser Methode wird sich sogleich zeigen.

IV.
Beziehung der Himmelskörper, welche der Erde ziemlich nahe sind, auf den Mittelpunct oder auf die Oberfläche der Erde.

Parallaxe der Länge und Breite.

§. 34.

Werden die Gleichungen [N] auf die Himmelskörper, welche sich nahe an der Erde befinden, wie z. B. auf dem Mond und die unteren Planeten, angewandt: so erhält man ihre wahre, das heißt: aus dem Mittelpuncte der Erde gesehene Lage; und ihre scheinbare, das heißt: aus irgend einem Puncte ihrer Oberfläche gesehene Lage.

*) C. Fr. Gauss. Theoria motus corporum coelestium, pag. 58.

**) Man sehe Lagrange's wichtige Abhandlung über die Verfinsterungen, in den Berliner Ephemeriden vom Jahre 1782, pag. 17.

Es stelle in derselben (Fig. 10. Tab. II.) S den Mittelpunct der Erde vor; W sey ein Punct ihrer Oberfläche, den wir durch die Linie WT parallel mit ZC auf die Ecliptik, welche durch den Mittelpunct der Erde geht, beziehen wollen; es wird also $SW = R$ der Radius der Erde für den Punct W seyn; ST der abgekürzte Radius R'; WST die Breite des Zeniths $= s$; TS♈ die Länge des Zeniths oder des Nonagesimus $= N$ nach §. 31.; und folglich $R \cos s = R'$.

Es sey nun noch Z der Mond der Erde auf seiner eigenen Bahn; durch ZC wird derselbe auf die Ecliptik bezogen. Ist $SZ = r$: so ist ZSC die wahre Breite des Mondes $= p$, und $r \cos p = r'$; CS♈ ist die wahre Länge des Mondes $= D$; CT♈ aber dessen scheinbare Länge $= D'$; ZWg ist die scheinbare Breite desselben, von der Oberfläche der Erde aus gesehen $= p'$; WZ ist der in der Oberfläche der Erde gesehene Abstand des Mondes $= \Delta$; Wg aber dessen abgekürzte Distanz $= \Delta'$; und $\Delta \cos p' = \Delta' = Wg = TC$. Werden also die Bogen und Winkel der Gleichungen [N] in die gegenwärtige Bedeutung übersetzt: so ist $l = D$, $\lambda = D'$, $L = N$, und die Coordinaten ZC, CP, PS bestimmen die wahre Lage des Gestirns Z. Die Coordinaten WT, TQ, SQ hingegen geben die Lage des Zeniths oder des Punctes W der Erdoberfläche.

$$ZC = r \sin p; \qquad WT = R \sin s;$$
$$CP = r \cos p . \sin D; \qquad TQ = R \cos s . \sin N;$$
$$SP = r \cos p . \cos D; \qquad SQ = R \cos s . \cos N:$$
$$Zg = \Delta \sin p'.$$

Die Gleichungen [N] §. 33. verwandeln sich, nach der Einführung der gegenwärtigen Werthe für die Bogen und Winkel, in folgende:

$$\left.\begin{aligned}\Delta \cos p' . \cos(D'-E) &= r . \cos p . \cos(D-E) - R . \cos s . \cos(N-E)\\ \Delta \cos p' . \sin(D'-E) &= r . \cos p . \sin(D-E) - R . \cos s . \sin(N-E)\end{aligned}\right\}[N']$$

die zweite Gleichung durch die erste, und das ganze noch durch

r dividirt; $\frac{R}{r} = \sin\pi$ gesetzt, wo π die Horizontalparallaxe bedeutet, giebt

$$\tang(D'-E) = \frac{\cos p.\sin(D-E) - \sin\pi.\cos s.\sin(N-E)}{\cos p.\cos(D-E) - \sin\pi.\cos s.\cos(N-E)} \quad [N'']$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta}{r}\cos p' &= \frac{\cos p.\cos(D-E) - \sin\pi.\cos s.\cos(N-E)}{\cos(D'-E)}\\ \frac{\Delta}{r}\cos p' &= \frac{\cos p.\sin(D-E) - \sin\pi.\cos s.\sin(N-E)}{\sin(D'-E)}\end{aligned}\right\} [Q]$$

ZC — Zg = gC = WT; das ist $r\sin p - \Delta\sin p' = R\sin s$; hieraus

$$\frac{\Delta}{r}\sin p' = \sin p - \sin\pi.\sin s;$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned}\tang p' &= \frac{(\sin p - \sin\pi.\sin s)\cos(D'-E)}{\cos p.\cos(D-E) - \sin\pi.\cos s.\cos(N-E)}\\ \text{oder} &= \frac{(\sin p - \sin\pi.\sin s)\sin(D'-E)}{\cos p.\sin(D-E) - \sin\pi.\cos s.\sin(N-E)}.\end{aligned}\right\} [Q']$$

Hier sehen wir, daß die Gleichung [N''] die scheinbare Länge D' des Gestirns, durch die wahre Länge D; die Gleichung [Q'] hingegen die scheinbare Breite p', durch die wahre p ausgedrückt, giebt. Der Unterschied der beiden Längen giebt die Parallaxe der Länge $D' - D = \Pi$; der Unterschied der beiden Breiten aber die Parallaxe der Breite $p - p' = \varrho$.

Da nun aber die Lage der senkrechten Ebenen, auf die sich die Coordinaten beziehen, willkührlich ist: so wird man SN (Fig. 10. Tab. II.) nach verschiedenen Richtungen ziehen können; oder, was auf eins hinausläuft, es werden für den Winkel E verschiedene Annahmen Statt finden. Es gehe SN durch die Aequinoctialpuncte: so wird E = o; und es ist

$$\tang D' = \frac{\cos p.\sin D - \sin\pi.\cos s.\sin N}{\cos p.\cos D - \sin\pi.\cos s.\cos N}, \quad [I]$$

$$\tang p' = \frac{(\sin p - \sin\pi.\sin s)\cos D'}{\cos p.\cos D - \sin\pi.\cos s.\cos N}. \quad [II]$$

Die vorstehenden zwei Gleichungen [I], [II], zur Berechnung der Parallaxe der Länge und Breite, hat Olbers in den Berliner Ephemeriden aufgestellt *).

Wird E = D gesetzt, das heißt: die Axe SN durch S, C, den Ort der wahren Länge des Gestirns, gezogen: so geben die Gleichungen [N''], [Q'] folgende:

$$\tang(D'-D) = \frac{\sin\pi.\ \cos s.\ \sin(D-N)}{\cos p - \sin\pi.\ \cos s.\ \cos(D-N)}, \quad [III]$$

$$\tang p' = \frac{(\sin p - \sin\pi.\ \sin s)\cos(D'-D)}{\cos p - \sin\pi.\ \cos s.\ \cos(N-D)}. \quad [IV]$$

Die Gleichungen [III], [IV] hat Lexell in den Berliner Ephemeriden gegeben **). Wird die Gleichung [III] durch $\cos p$ dividirt, und der Kürze halber $\frac{\sin\pi.\ \cos s}{\cos p} = m$ gesetzt: so erhält man

$$\tang(D'-D) = \frac{m\sin(D-N)}{1-m\cos(D-N)};$$

und also nach §. 18.:

$$\Pi = D'-D = \frac{m\sin(D-N)}{\sin 1''} + \frac{m^2\sin 2(D-N)}{\sin 2''} + \frac{m^3\sin 3(D-N)}{\sin 3''} + \text{etc.} \quad [V]$$

Diese schöne und sehr nützliche Gleichung, zur Berechnung der Parallaxe der Länge, hat Delambre im Jahre 1789 aufgestellt, und zur Berechnung der Parallaxe des Uranus angewandt. Von dieser stark convergirenden Reihe geben die drei ersten Glieder schon ein Resultat, was sich bedeutend der Wahrheit nähert, wie wir dieß an einem Beispiele sehen werden.

---

*) M. s. die Berliner Ephemeriden vom Jahre 1808, p. 196, und vom Jahre 1811, p. 97.

**) Vergleiche die Berliner Ephemeriden vom Jahre 1777, pag. 152.

Es werde endlich die Axe SN durch das Zenith des Orts W der Oberfläche der Erde gelegt, oder es werde $E = N$ gesetzt: so verwandeln sich die Gleichungen [N″], [Q′] in

$$\tan (D' - N) = \frac{\cos p . \sin (D - N)}{\cos p . \cos (D - N) - \sin \pi . \cos s}, \quad [VI]$$

$$\cot (D' - N) = \cot (D - N) - \frac{\sin \pi . \cos s}{\cos p . \sin (D - N)}, \quad [VII]$$

$$\begin{aligned} \tan p' &= \frac{(\sin p - \sin \pi . \sin s) \cos (D' - N)}{\cos p . \cos (D - N) - \sin \pi . \cos s} \\ &= \frac{(\sin p - \sin \pi . \sin s) \sin (D' - N)}{\cos p . \sin (D' - N)}. \end{aligned} \quad [VIII]$$

Wird aus der Gleichung [VI] der Werth für $\cos (D' - N)$ abgeleitet, und derselbe in die Gleichung [VIII] gesetzt: so erhellt

$$\begin{aligned} \tan p' &= \frac{(\sin p - \sin \pi . \sin s) \sin (D' - N)}{\cos p . \sin (D - N)} \\ &= \frac{\tan p . \sin (D' - N)}{\sin (D - N)} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi . \sin s}{\sin p} \right\}. \end{aligned} \quad [IX]$$

Die Gleichungen [VI], [VIII] und [IX] hat Lexell aufgestellt; die Gleichung [VII] aber, die, wie wir sehen, die [VI] Lexellische ist, hat Olbers in den Berliner Ephemeriden gegeben *).

Richten wir unsere Aufmerksamkeit noch auf die Gleichung [VII] und setzen in ihr $\frac{\sin \pi . \cos s}{\cos p} = \cos u$, so erhält man

$$\begin{aligned} \cot (D' - N) &= \frac{\cos (D - N) - \cos u}{\sin (D - N)} \\ &= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} (D + u - N) \sin \tfrac{1}{2} (N + u - D)}{\sin (D - N)}. \end{aligned} \quad [X]$$

Dieß ist die einfachste und bequemste Gleichung zur genauen Berechnung der Parallaxe der Länge.

---

*) M. s. die Berliner Ephemeriden vom Jahre 1811, p. 99.

Man betrachte nun noch die Gleichung [VIII]

$$\tang p' = \frac{\sin(D' - N)}{\sin(D - N)} \left\{ \tang p - \frac{\sin\pi . \sin s}{\cos p} \right\}.$$

Wird für die Breite p ihre Ergänzung zu 90°, oder die Entfernung des Gestirns vom Pole der Ecliptik gesetzt, das heißt: $p = 90^\circ - \delta$; $p' - 90^\circ - \delta'$, und also $p - p' = \delta' - \delta = \varrho$, $D' - D = \Pi$; so ist $\tang p' = \cotg \delta'$, $\tang p = \cotg \delta$, und folglich

$$\cotg \delta' = \frac{\sin(D' - N)}{\sin(D - N)} \left\{ \cotg \delta - \frac{\sin\pi . \sin s}{\sin\delta} \right\}. \quad [\mathrm{VIII}_2]$$

$$\cotg \delta = \frac{\sin(D - N)}{\sin(D' - N)} \cotg \delta' + \frac{\sin\pi . \sin s}{\sin\delta};$$

$$\cotg \delta - \cotg \delta' + \cotg \delta' = \frac{\sin(D - N)}{\sin(D' - N)} \cotg \delta' + \frac{\sin\pi . \sin s}{\sin\delta};$$

$$\cotg \delta - \cotg \delta' = \frac{\sin\delta' \cos\delta - \cos\delta' \sin\delta}{\sin\delta . \sin\delta'}$$

$$= \frac{\sin(D - N) - \sin(D' - N)}{\sin(D' - N)} \cotg \delta' + \frac{\sin\pi . \sin s}{\sin\delta};$$

$\sin(\delta' - \delta) = \sin\pi . \sin s [\sin\delta' - \tang x . \cos\delta']$, wo

$$\tang x = \frac{2\cos(D - N + \frac{1}{2}\Pi)\sin\frac{1}{2}\Pi \sin\delta}{\sin\pi . \sin s . \sin(D' - N)}.$$

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{\sin\pi . \sin s}{\cos x} \sin(\delta' - x). \quad [\mathrm{XI}]$$

Und weil $\delta' - \delta = \varrho$, $\delta' = \delta + \varrho$ ist, so hat man

$$\sin\varrho = \frac{\sin\pi . \sin s}{\cos x} [\sin(\delta - x)\cos\varrho - \cos(\delta - x)\sin\varrho];$$

wird die ganze Gleichung durch $\cos\varrho$ dividirt und der Kürze wegen $\frac{\sin\pi . \sin s}{\cos x} = m$ gesetzt: so ist

$$\tang\varrho = \frac{m . \sin(\delta - x)}{1 - m\cos(\delta - x)}; \quad [\mathrm{XII}]$$

und folglich nach §. 18.

$$\varrho = \frac{m \cdot \sin(\delta - x)}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2(\delta - x)}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3(\delta - x)}{\sin 3''} + \frac{m^4 \sin 4(\delta - x)}{\sin 4''} + \text{etc.} \quad [XIII]$$

Wäre δ', d. h. die scheinbare Entfernung des Gestirns vom Pole der Ecliptik, gegeben: so würde man die Gleichung [XI] anwenden; wäre hingegen nicht δ', sondern nur δ, oder die wahre Entfernung von Pole bekannt: so würde man die Gleichung [XII] oder die stark convergirende Reihe [XIII] gebrauchen, in welcher schon die drei Glieder ein Resultat, das sich bedeutend der Wahrheit nähert, liefern. Diese drei letzten Gleichungen hat Delambre aus den Lexellischen abgeleitet, und gebraucht sie bei der Berechnung der Breitenparallaxe.

Wir haben also hier aus den Gleichungen [N] die vorzüglichsten bis jetzt bekannten und von den Astronomen gebrauchten Gleichungen zur Berechnung der Längen- und Breitenparallaxe abgeleitet, und streng bewiesen: die von vielen Schriftstellern auf verschiedene Art und nur zu oft durch langwierige und dunkle Rechnungen gewiesen werden, und die wir hier auf eine so leichte und einfache Art aus den drei für den Winkel E eingeführten Werthen erhielten.

Die Parallaxenrechnung ist beinahe der wichtigste Theil der sphärischen Astronomie; denn davon hängen die Entfernungen der Planeten von der Erde und von der Sonne, und also die Kenntniß der ganzen Sonnenwelt, ab; davon die Berechnung der Verfinsterungen der Sonne durch den Mond der Erde und durch die untern Planeten; die Bedeckung der Sterne durch den Mond, und also eine große Masse astronomischer Fundamentalkenntnisse. Woraus man denn auch einigermaaßen den Werth der hier auseinandergesetzten Untersuchungen wird beurtheilen können.

Das Ganze soll nun noch durch ein Beispiel erläutert werden. Den 7. Septbr. 1820 n. S. um $2^h 29' 23''$ wahr. Zeit in Wilna, ist die Länge der Sonne $5^z 14° 45' 7'',13$; die Schiefe der Ecliptik $\omega = 23° 27' 55'',7$; die wahre Länge des Mondes $5^z 14° 16' 43'' 2 = 164° 16' 43'',2 = D$; die wahre nördl. Breite des Mondes $= 47' 27'',22 = p$; die Horizontalparallaxe der Sonne $8'',74$; des Mondes unterm Aequator $53' 55'',4$; die Differenz derselben $\pi = 53' 46'',66$, für die Breite von Wilna aber ist das nämliche $\pi = 53' 40''$. Für diese Zeit ist bereits §. 31. $M = 203° 18' 24'',69$; $N = 167° 58' 12''$; $s = 56° 58' 23''$ gefunden worden. — Wie ist zu eben der Zeit die Längen- und Breitenparallaxe des Mondes? und hat die Sonnenfinsterniß zu der Zeit bereits angefangen oder nicht? Wir wollen nach allen angedeuteten Gleichungen rechnen, um uns zu überzeugen, ob die Resultate übereinstimmen oder nicht.

Gleichung [I].

$\text{l.}\cos p = 9{,}9999586 +$

$\text{l.}\sin D = 9{,}4329034 +$

$\text{l.}(1) \quad 9{,}4328620 +$

$(1) \quad 0{,}270933 +$

$(2) \quad 0{,}001773 +$

$\text{l.}\sin \pi = 8{,}1934355 +$

$\text{l.}\cos s = 9{,}7364227 +$

$\text{l.}\sin N = 9{,}3189473 +$

$\text{l.}(2) \quad 7{,}2488055 +$

$(2) \quad 0{,}001773 +$

$(1) - (2) = 0{,}269160 +$ Zähler [I].

$\text{l.}\cos p = 9{,}9999586 +$

$\text{l.}\cos D = 9{,}9834418 -$

$\text{l.}(1) \quad 9{,}9834004 -$

$(1) \quad 0{,}96250 -$

$(2) \quad 0{,}008322 -$

$\text{l.}\sin \pi.\ \cos s = 7{,}9298582 +$

$\text{l.}\cos N = 9{,}9903560 -$

$\text{l.}(2) \quad 7{,}9202142 -$

$(2) \quad 0{,}008322 -$

$(1) - (2) = 0{,}954178 -$ der gemeinschaftliche Nenner.

$\text{l.}\,0{,}26916 = 9{,}4300105 +$

$\text{l.}\,0{,}954178 = 9{,}9796295 -$

$\text{l.}\tan D' = 9{,}4503810 -$

$D' = 180° - (15° 45' 10'',7) = 164° 14' 49'',3$ für die scheinbare Länge.

$D' - D = -(1' 53'',9)$ Parallaxe der Länge.

Gleichung [II].

l. sin p =	8,1399821 +	l. sin π =	8,1934355 +
l. cos D′ =	9,9833742 —	l. sin s =	9,9234587 +
l. (1)	8,1233563 —	l. cos D′ =	9,9833742 —
(1)	0,0132848 —	l. (2)	8,1002684 —
(2)	0,0125970 —	(2)	0,0125970 —
(1)—(2) =	0,0006878 —		

l. 0,0006878 = 6,8374622 —
l. 0,954178 = 9,9796295 —
l. tang p′ = 6,8578327 +

p′ = 2′ 28″, 6 für die scheinbare nördliche Breite.

p′ — p = (44′ 58″, 62) Parallaxe der Breite.

Gleichung [III].

l. sin π. cos s =	7,9298582 +	cos p =	0,999990
l. cos (N — D) =	9,9990981	(1) =	0,008490
l. (1)	7,9289563	cos p — (1) =	0,991500

l. sin π. cos s = 7,9298582 +
l. sin (N — D) = 8,8087601 +
l. des Zählers = 6,7386183 +
l. 0,99150 = 9,9962927 +
l. tang (D′ — D) = 6,7423256

D′ — D = — (1′ 53″, 9).

Gleichung [IV].

l. sin p =	8,1399821 +	l. sin π. sin s =	8,1168942 +
l. cos (D′ — D) =	9,9999999 +	l. cos (D′ — D) =	9,9999999 +
l. (1)	8,1399820	l. (2)	8,1168941
(1)	0,013803		
(2)	0,013088	(2)	0,013088
(1) — (2) =	0,000715		

l. 0,000715 = 6,8543060
l. 0,99150 = 9,9962927
l. tang p′ = 6,8580133

p′ = 2′ 28″, 7.

Gleichung [V], die Reihe.

$N-D=3^{\circ}41'28'',8$; $2(N-D)=7^{\circ}22'57'',6$;

$3(N-D)=11^{\circ}4'26'',4$: folglich ist $D-N$ negativ.

$$\begin{array}{rl} \text{l. sin}\,\pi.\ \cos s = & 7{,}9298582+ \\ \text{Comp. l. cos p.} = & 0{,}0000414+ \\ \hline \text{l. m.} = & 7{,}9298996+ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. m.} = & 7{,}9298996+ \\ \text{l. sin}\,(D-N) = & 8{,}8087601+ \\ \text{Comp. l. sin}\,1'' = & 5{,}3144251+ \\ \hline \text{l. (1)} & 2{,}0530848- \\ (1) & 113{,}000 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. m}^2 = & 5{,}8597992+ \\ \text{l. sin}\,2\,(D-N) = & 9{,}1088882- \\ \text{Comp. l. sin}\,2'' = & 5{,}0133951+ \\ \hline \text{l. (2)} & 9{,}9820825- \\ (2) & 0{,}959. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. m}^3 = & 3{,}7896988+ \\ \text{l. sin}\,3\,(D-N) = & 9{,}2834746- \\ \text{Comp. l. sin}\,3'' = & 4{,}8373039+ \\ \hline \text{l. (3)} & 7{,}9104773- \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (1) & -113{,}000 \\ (2) & -\quad 0{,}959 \\ (3) & -\quad 0{,}008 \\ \hline \Pi = & -113{,}967 \\ = & -(1'53'',9) \end{array}$$

Gleichung [VI].

$$\begin{array}{rl} \text{l. cos p} = & 9{,}9999586+ \\ \text{l. cos}\,(D-N) = & 9{,}9990981+ \\ \hline \text{l. (1)} & 9{,}9990567+ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \sin\pi.\ \cos s = & 0{,}0085086+ \\ (1) & 0{,}9978300+ \\ \hline (2) & 0{,}9893214+ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. cos p} = & 9{,}9999586+ \\ \text{l. sin}\,(D-N) = & 8{,}8087601- \\ \hline & 8{,}8087187- \\ \text{l. (2)} & 9{,}9953368+ \\ \hline \text{l. tang}\,(D'-N) = & 8{,}8133819- \\ D'-N = & -3^{\circ}43'22'',7 \\ N-D = & \ \ 3^{\circ}41'28'',8 \\ D'-D = & -(1'53'',9). \end{array}$$

Gleichung [X].

$$\begin{array}{rl} \text{l. sin}\,\pi.\ \cos s = & 7{,}9298582 \\ \text{Comp. l. cos p} = & 0{,}0000414 \\ \hline \text{l. cos u} = & 7{,}9298996 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} u = & 89^{\circ}30'44'',8 \\ \tfrac{1}{2}(u+D-N) = & 42^{\circ}54'38'' \\ \tfrac{1}{2}(N+u-D) = & 46^{\circ}36'\ 6'',8 \end{array}$$

$$l.\,2\sin\tfrac{1}{2}(D+u-N)=0{,}1340851+$$
$$l.\sin\tfrac{1}{2}(N+u-D)=9{,}8612936+$$
$$Comp.\,l.\sin(D-N)=1{,}1912399-$$
$$l.\cotg(D'-N)=1{,}1866186-$$
$$D'-N=-(3^{0}\,43'23'');$$
$$D'=164^{0}\,14'49''.$$

Gleichung [VIII].

$l.\sin p=8{,}1399821+$	$l.\sin\pi.\ \sin s=8{,}1168942+$
$l.\sin(D'-N)=8{,}8124712-$	$l.\sin(D'-N)=8{,}8124712-$
$l.(1)=6{,}9524533-$	$l.(2)\quad 6{,}9293654-$
$(1)\quad 0{,}00089630-$	$(2)\quad 0{,}00084989-$
$l.\cos p=9{,}9999586+$	$(1)=-0{,}00089630$
$l.\sin(D-N)=8{,}8087601-$	$(2)=-0{,}00084989$
$l.(3)\quad 8{,}8087187-$	$(1)-(2)=-0{,}00004641\ (4)$

$$l.(4)=5{,}6666116-$$
$$Comp.\,l.(3)=1{,}1912813-$$
$$l.\operatorname{tang}p'=6{,}8578929+$$
$$p'=2'28'',7.$$

Gleichung [IX].

$l.\operatorname{tang}p=8{,}1399711+$	$l.\sin\pi.\sin s=8{,}1168942+$
$l.\sin(D'-N)=8{,}8124712-$	$Comp.\,l.\sin p=1{,}8600179+$
$Comp.\,l.\sin(D-N)=1{,}1912399-$	$l.(2)\quad 9{,}9769121$
$l.(1)\quad 8{,}1436822+$	
$l.(3)\quad 8{,}7141117+$	$1-(2)=1-0{,}948226$
$l.\operatorname{tang}p'=6{,}8577939+$	$=0{,}051774\ (3)$

$$p'=2'28'',6$$

Gleichungen [XI], [XII] und [XIII].

$$\Pi=-(1'53''9);\ \tfrac{1}{2}\Pi=-56'',95;$$
$$D-N+\tfrac{1}{2}\Pi=-(3^{0}\,42'25'',75);\ \delta=89^{0}\,12'32'',78.$$
$$l.\,2=0{,}3010300+$$
$$l.\cos(D-N+\tfrac{1}{2}\Pi)=9{,}9990903+$$
$$l.\sin\tfrac{1}{2}\Pi=6{,}4410653-$$
$$l.\sin\delta=9{,}9999584+$$
$$l.(1)\quad 6{,}7411440-$$

$$\text{l. sin}\,\pi.\ \text{sin}\,s = 8{,}1168942+$$
$$\text{l. sin}\,(D'-N) = 8{,}8124712-$$
$$\text{l. (2)}\quad 6{,}9293654-$$
$$\text{l. (1)}\quad 6{,}7411440-$$
$$\text{l. (1)} - \text{l. (2)} = \text{l. tang}\,x = 9{,}8117786+$$
$$x = 32^\circ\,57'\,20''$$
$$\delta' - x = 57^\circ\,0'\,11'',4.$$

$$\text{l. sin}\,\pi.\ \text{sin}\,s = 8{,}1168942+$$
$$\text{l. sin}\,(\delta'-x) = 9{,}9236069+$$
$$\text{Comp. l. cos}\,x = 0{,}0761900+$$
$$\text{l. sin}\,(\delta'-\delta) = 8{,}1166911+$$
$$\text{l. sin}\,\pi.\ \text{sin}\,s = 8{,}1168942+$$
$$\text{Comp. l. cos}\,x = 0{,}0761900+$$
$$\text{l. m} = 8{,}1930842+$$

$$\delta' - \delta = \varrho = 44'\,58'',5$$
$$\delta - x = 56^\circ\,15'\,12'',78$$
$$2(\delta - x) = 112^\circ\,30'\,25'',56$$
$$3(\delta - x) = 168^\circ\,45'\,38'',34$$
$$\text{l. m} = 8{,}1930842+$$
$$\text{l. sin}\,(\delta-x) = 9{,}9198643+$$
$$\text{Comp. l. sin}\,1'' = 5{,}3144251+$$
$$\text{l. (1)} = 3{,}4273736+$$
$$(1)\quad 2675'',3.$$

$$\text{l. m}^2 = 6{,}3861684$$
$$\text{l. sin}\,2(\delta-x) = 9{,}9655930$$
$$\text{Comp. l. sin}\,2'' = 5{,}0133951$$
$$\text{l. (2)}\quad 1{,}3651565$$
$$(2)\quad 23'',182$$

$$\text{l. m}^3 = 4{,}5792526$$
$$\text{l. sin}\,3(\delta-x) = 9{,}2898297$$
$$\text{Comp. l. sin}\,3'' = 4{,}8373039$$
$$\text{l. (3)}\quad 8{,}7063862$$
$$(3)\quad 0'',0508.$$

$(1)+(2)+(3) = 2698'',53 = 44'\,58'',5 = \varrho$, ist die Parallaxe der Breite, woraus die scheinbare nördliche Breite des Mondes $p' = 2'\,28'',7$ folgt.

Wir sehen also, daß diese unter der verschiedensten Gestalt dargestellten, und durch verschiedene Seiten und Winkel ausgedrückten Gleichungen immer dasselbe Resultat für die Parallaxe der Länge und Breite des Mondes geben.

Hat man für die gegebene Zeit in Wilna, d. i. $2^h\,29'\,23''$ die wahre Länge der Sonne $164^\circ\,45'\,7'',13$; die scheinbare Länge des Mondes $164^\circ\,14'\,49'',3$; ihre Differenz $30'\,17'',83$; die scheinbare Breite des Mondes $2'\,28'',6$, so sind uns in einem ebenen rechtwinkligen Dreiecke die beiden Catheten gegeben. Eine

von diesen Catheten ist die Differenz der Länge 30′ 17″,83 = 1817″,83; die andere die scheinbare Breite des Mondes 2′ 28″,6 = 148″,6; und folglich wird die Hypotenuse, oder der Abstand des Mittelpunctes der Sonne von dem des Mondes 30′ 23″,9 = 1824″ seyn. Der Halbmesser der Mondscheibe aus den Tafeln ist 14′ 43″,1; vergrößert man ihn um 7″,5, so ist 14′ 50″6; der Halbmesser der Sonnenscheibe 15′ 54″,8. Die Summe dieser Halbmesser = 30′ 45″,4 ist der Abstand der Mittelpuncte für den Anfang und für das Ende der Sonnenfinsterniß. Nun ist aber der Abstand der Mittelpuncte für den Anfang der Sonnenfinsterniß 30′ 24″ gefunden worden; 30′ 45″,4 — (30′ 24″) = 21″,4, der Mond schnitt demnach schon um 21″,4 in die Sonnenscheibe ein.

Wird die Rechnung um 5′ Zeit früher angestellt, das heißt um $2^h 24' 23''$, so erhält man die wahre Länge der Sonne 164° 44′ 55″; die wahre Länge des Mondes 164° 14′ 16″; die wahre nördliche Breite des Mondes 47′ 40″,65; den Stundenwinkel der Sonne 36° 5′ 45″; die Rectascension der Sonne = 165° 57′ 28″,44; und folglich M = 202° 3′ 13″,44; N = 166° 59′ 7″; s = 56° 29′ 10″; und hieraus die scheinbare Länge des Mondes D′ = 164° 12′ 50″; die scheinbare nördliche Breite des Mondes 2′ 57″,3; und mithin den Abstand der Mittelpuncte 32′ 13″,18; 32′ 13″,18 — (30′ 24″) = 1′ 49″,18 = 109″,18; um so viel näherten sich einander die Mittelpuncte in 5′ Zeit; es verhält sich demnach 109″,18 : 300″ = 21,″4 : 58,″8, und wird der letzte Ausdruck von $2^h 29' 23''$ abgezogen: so erhält man die wahre Zeit für den Anfang der Sonnenfinsterniß in Wilna $2^h 28' 24'',2$.

Parallaxe der Rectascension und Declination.

§. 35.

Aus den aufgestellten Gleichungen für die Parallaxe der Länge und Breite kann man nun auch leicht die Parallaxe ei-

ner jeden andern Lage, z. B. in Beziehung auf den Aequator und Horizont, ableiten. In unsern Gleichungen kommt N, s vor, d. h. die Länge und Breite des Zeniths, von welchen wir aus §. 31. wissen, daß

$$\tan N = \frac{\tan H. \sin \omega}{\cos M} + \cos \omega. \tan M.$$

$$\sin s = -\sin M. \cos H. \sin \omega + \sin H. \cos \omega.$$

Setzt man $\omega = o$, und folglich $\sin \omega = o$, $\cos \omega = 1$: so verwandelt sich der Pol der Ecliptik in den Weltpol, die Ecliptik fällt mit dem Aequator zusammen; die Länge geht in die gerade Aufsteigung und die Breite in die Abweichung über, das heißt: es wird

$$D = \alpha;\ D' = \alpha';$$
$$p = \beta;\ p' = \beta';$$
$$N = M;\ s = H;$$

H ist die geographische Breite des Ortes, und die Gleichungen [I], [II] verwandeln sich in folgende:

$$\tan \alpha' = \frac{\cos \beta. \sin \alpha - \sin \pi. \cos H. \sin M}{\cos \beta. \cos \alpha - \sin \pi. \cos H. \cos M}. \quad [XIV]$$

$$\tan \beta' = \frac{(\sin \beta - \sin \pi. \sin H) \cos \alpha'}{\cos \beta. \cos \alpha - \sin \pi. \cos H. \cos M}. \quad [XV]$$

$\alpha' - \alpha$ ist die Parallaxe der Rectascension, $\beta' - \beta$ aber die Parallaxe der Declination. Diese Gleichungen hat Herr Professor Bessel in der monatlichen Correspondenz des Herrn von Zach *), aber unter einer andern Gestalt und ohne Beweis aufgestellt. Sie sind bequem zur Berechnung der Sternbedeckungen durch den Mond. Es kommt in denselben weder die Breite und Länge des Gestirns, noch die des Zeniths vor. Herr Prof. Bessel hat die Länge und die Breite des Mondes als aus den Tafeln bekannt eingeführt; es wird also

*) Vergl. Monatliche Correspondenz 1806, pag. 484.

bei ihm p, D für α, β gesetzt, das heißt: nimmt man tang $\psi = \cot g\, p \cdot \sin D = \frac{\sin D}{\tan g\, p}$; so giebt Bessel folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \tan g\, \alpha' &= \frac{\frac{\sin p}{\cos \psi} \sin(\psi - \omega) - \sin \pi.\ \sin M.\ \cos H}{\cos p.\ \cos D - \sin \pi.\ \cos M.\ \cos H} \\ \tan g\, \beta' &= \frac{\left\{\frac{\sin p}{\cos \psi} \cos(\psi - \omega) - \sin \pi.\ \sin H\right\} \cos \alpha'}{\cos p.\ \cos D - \sin \pi.\ \cos M.\ \cos H}, \end{aligned}\right\} [A]$$

welche sich in die Gleichungen [XIV], [XV] verwandeln, wenn $\omega = 0$, $p = \beta$, $D = \alpha$ gesetzt wird; und umgekehrt erhält man aus den Gleichungen [XIV], [XV] die Bessel'schen, wenn in dieselben p, D für α, β mittelst der in den §. §. 28., 29 gewiesenen Werthe: $\cos \lambda.\ \cos \gamma = \cos \alpha.\ \cos \beta$; $\cos D.\ \cos p = \cos \alpha.\ \cos \beta$; $\cos \omega.\ \cos p.\ \sin D - \sin \omega.\ \sin p = \sin \alpha.\ \cos \beta$, eingeführt wird.

Beispiel. Wir wollen nun vermittelst der Parallaxe der Rectascension und Declination die Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes, für den 7. September 1820 in Wilna um $2^h 29' 23''$ wahr. Zeit, suchen. Bekannt ist schon $\omega = 23^\circ 27' 55'',7$.

Für die Sonne ist: $\lambda = 164^\circ 45' 7,'' 13$; $\alpha = 165^\circ 57' 39''$, 69; $\beta = 6^\circ 0' 40''$ nördlich.

Für den Mond: $\lambda = D = 164^\circ 16' 43'',2$; $p = \gamma = 47' 27''$, 22; $\pi = 53' 40''$; $M = 180^\circ + 23^\circ 18' 24'',69$; $\alpha = 165^\circ 49'$ $44'',63$; $\beta = 6^\circ 55' 24''$.

Man suche zuvörderst α', β' für den Mond mittelst der Gleichungen [XIV], [XV], indem man $\alpha = 165^\circ 49' 44'',63$; $\beta = 6^\circ 55' 24$ setzt.

$l.\cos\beta = 9{,}9968217 +$
$l.\sin\alpha = 9{,}3888391 +$
$l.(1) \quad 9{,}3856608 +$

$(1) \quad 0{,}24303 +$
$(2) \quad 0{,}003585 -$
$(1)-(2) = 0{,}246615 +$ der Zähler.

$l.\sin\pi = 8{,}1934355 +$
$l.\cos H = 9{,}7637473 +$
$l.\sin M = 9{,}5973171 -$
$l.(2) \quad 7{,}5544999 -$
$(2) \quad 0{,}003585 -$

$l.\cos\beta = 9{,}9968217 +$
$l.\cos\alpha = 9{,}9865791 -$
$l.(3) \quad 9{,}9834008 -$
$(3) \quad 0{,}96250 -$

$l.\sin\pi.\ \cos H = 7{,}9571828 +$
$l.\cos M = 9{,}9630314 -$
$l.(4) \quad 7{,}9202142 -$
$(4) \quad 0{,}0083218 -$

$(3)-(4) = 0{,}954178$ der gemeinschaftliche Nenner.

$l.\ 0{,}246615 = 9{,}3920019 +$
$l.\ 0{,}954178 = 9{,}9796295 -$
$l.\tang\alpha' = 9{,}4123724 -$
$\alpha' = 180° - (14° 29' 27'') = 165° 30' 33''.$

$l.\sin\beta = 9{,}0811353 +$
$l.\cos\alpha' = 9{,}9859596 -$
$l.(1) \quad 9{,}0670949 -$
$(1) \quad 0{,}116706 -$
$(1)-(2) = 0{,}104398 -$ der Zähler.

$l.\sin\pi = 8{,}1934355 +$
$l.\sin H = 9{,}9107911 +$
$l.\cos\alpha' = 9{,}9859596 -$
$l.(2) \quad 8{,}0901862 -$
$(2) \quad 0{,}012308 -$

$l.\ 0{,}104398 = 9{,}0186923 -$
$l.\ 0{,}954178 = 9{,}9796295 -$
$l.\tang\beta' = 9{,}0390628 +$
$\beta' = 6° 14' 38''$

$\alpha ⊙ = 165° 57' 39''.$
$\alpha' ☾ = 165° 30' 33''.$
Unterschied $= \quad 27' 6'' = 1626''.$
$\beta ⊙ = 6° 0' 40''.$
$\beta' ☾ = 6° 14' 38''.$
Unterschied $= \quad 13' 58'' = 838''.$

In dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke sind die beiden Catheten 1626'', 838'', woraus denn die Hypotenuse oder die Ent=

fernung der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes 1829″ = 30′ 29″ folgt.

Parallaxe des Stundenwinkels, und eine neue Methode, Finsternisse zu berechnen.

§. 36.

Wird in die Gleichung [III] die Bedingung $\omega = 0$ eingeführt: so fällt die Ecliptik mit dem Aequator zusammen, die Winkel und Bogen verwandeln sich so, daß $N = M$, $s = H$, $D' = \alpha'$, $D = \alpha$ wird; $D' - D$ ist die Parallaxe des Stundenwinkels, welche wir dP nennen wollen; $D - N = \alpha - M = P$ aber der Stundenwinkel, und die Gleichung [III] giebt

$$\tang dP = \frac{\sin \pi.\ \cos H.\ \sin P}{\cos \beta - \sin \pi.\ \cos H.\ \cos P} = \frac{m \sin P}{1 - m \cos P}. \quad [XVI]$$

Setzt man der Kürze wegen

$$m = \frac{\sin \pi.\ \cos H}{\cos \beta}:$$

so erhält man nach §. 18.:

$$dP = \frac{m \sin P}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2P}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3P}{\sin 3''} + \text{etc.} \quad [XVII]$$

Diese Gleichung für die Parallaxe des Stundenwinkels ist von Delambre. Er hat eine recht scharfsinnige Anwendung derselben auf die Berechnung der Finsternisse gemacht; indem er nämlich, sowohl den Winkel P, als auch die Aenderung desselben, nach dem Mittelpuncte der Sonne versetzt: so gelangt er durch diese Aenderung vermittelst der Gleichung [VIII] zur Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes. Es sey (Fig. 11. Tab. II.) OPZ der Meridian, P der Weltpol, Z das Zenith, S der Ort der Sonne, L der Ort des Mondes; LV sey die Parallaxe der Höhe; man sucht den Winkel LSV als die Aenderung des Winkels ZSL = S′. Man versetze den Winkel P nach S, so daß er nun ZSL = S′ anzeige: so ist

PZ, PS, jetzt hier ZS, SL; ZS ist der Abstand der Sonne vom Zenith $=q$; LS der wahre Abstand der Mittelpuncte der Sonne und des Mondes $=E$; dP wird jetzt $LSV=\Pi$ seyn; $m=\frac{\sin\pi.\ \sin q}{\sin E}$, $P=S'$

$$\operatorname{tang}\Pi=\frac{m.\ \sin S'}{1-m.\ \cos S'}$$

$ZSV=S'+\Pi=S''$; S' ist der wahre, S'' aber der scheinbare Winkel; LS ist der wahre Abstand der Mittelpuncte $=E$; man soll nun den scheinbaren Abstand der Mittelpuncte $VS=E+\sigma=E'$ durch den wahren Abstand E, und durch die Aenderung des Winkels S'' ausdrücken; was uns die Gleichung [VIII_2] §. 34., in die gegenwärtige Bedeutung übersetzt, angiebt, das heißt: $\delta'=E+\sigma$, $\delta=E$; $D'-N=S''$, $D-N=S'$; und folglich

$$\operatorname{cotg}(E+\sigma)=\frac{\sin S''}{\sin S'}\left\{\operatorname{cotg}E-\operatorname{tang}u\right\},$$

wenn $\frac{\sin\pi.\ \sin s}{\sin E}=\operatorname{tang}u$ gesetzt wird.

Da nun aber in diesem Falle $s=H$ ist, also $\sin s=\sin H=\cos PZ$, was hier durch $\cos ZS=\cos q$ angedeutet wird: so ist

$$\operatorname{tang}u=\frac{\sin\pi.\ \cos q}{\sin E},$$

und einfacher

$$\operatorname{cotg}(E+\sigma)=\frac{\sin S''\cos(E+u)}{\sin S'\sin E.\ \cos u},\quad\text{[XVIII]}$$

oder $$\operatorname{tang}(E+\sigma)=\operatorname{tang}E'=\frac{\sin S'.\ \sin E.\ \cos u}{\sin S''\cos(E+u)}.$$

Diese neue Methode, Sonnenfinsternisse zu berechnen, ist von Delambre*). Um die zugehörigen Winkel zu finden,

*) Delambre's Astronomie, Tom. II. pag. 417.

zieht er den senkrechten Bogen ZQ, setzt $PQ = y$, $PS = \Delta$, $QS = \Delta - y$, und erhält

$$\tang y = \tang PZ.\ \cos P = \cos P.\ \cotg H;$$

ist $PZS = a$: so hat man

$$\tang a = \frac{\tang P.\ \sin y}{\sin(\Delta - y)};$$

$$\cos ZS = \cos q = \frac{\sin H.\ \cos(\Delta - y)}{\cos y}.$$

Der Unterschied zwischen der Rectascension der Sonne und der des Mondes giebt den Winkel LPS; aus welchem man $PSL = S$, und $LS = E$, die wahre Entfernung der Mittelpuncte, herleitet. Diese Methode setzt also eine genaue Kenntniß der Rectascension voraus, wo selbst noch auf Decimaltheile einer Secunde Rücksicht genommen werden muß. Die Kenntniß des Winkels $ZSV = S''$, den die Linie vom Scheitelpuncte mit der Linie, welche die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes mit einander verbindet, macht, ist sehr wichtig bei den Finsternissen; denn er giebt uns denjenigen Punct auf dem Umfange der Sonnenscheibe an, auf welchen der Anfang oder das Ende der Sonnenfinsterniß fällt.

Beispiel. Den 7. September 1820 n. S. um $2^h 29' 23''$ wahre Wilnaer Zeit, hat man die Länge der Sonne aus den Tafeln $164^\circ 45' 7'',13$; die stündliche Bewegung in der Länge $2' 25'',82$; die Horizontalparallaxe der Sonne $8'',74$; den Radius der Sonnenscheibe $15' 54'',8$. Aus den Mondstafeln ist hingegen die Länge des Mondes $164^\circ 16' 43'',2$; die nördliche Breite des Mondes $0^\circ 47' 27'',22$; die stündliche Bewegung des Mondes in der Länge $29' 26'',46$, in der Breite $-161'',2$; die Horizontalparallaxe des Mondes unterm Aequator $53' 55'',4$; der Radius der Mondscheibe $14' 43'',1$. Wird die Schiefe der Ecliptik zu $\omega = 23^\circ 27' 55'',7$; die Gestalt der Erde zu $\frac{329}{330}$ angenommen, und also die corrigirte Breite von Wilna $54^\circ 31' 10''$ gesetzt: so findet man, vermittelst der in §. 31. aufge-

stellten Gleichungen, für die Rectascension der Sonne 165° 57′ 39″,69; für die nördliche Declination der Sonne, und folglich für den Abstand der Sonne vom Weltpole, d. h. PS = 83° 59′20″. Die Rectascension des Mondes ist 165° 49′ 44″,63; die nördliche Declination des Mondes 6° 55′ 24″; und folglich sein Abstand vom Pole, oder PL = 83° 4′ 36″. Der Unterschied zwischen der Rectascension der Sonne und des Mondes 7′ 55″,06 giebt den Winkel LPS am Weltpole. Im Dreiecke LPS sind demnach die zwei Seiten LP, PS und der Winkel LPS gegeben, man findet also durch die Nepper'schen Analogien die zwei übrigen Winkel, nämlich: L = 171° 48′ 46″,8; S = 8° 10′ 20″,4, und die dritte Seite, d. h. den wahren Abstand des Mittelpunctes der Sonne von dem des Mondes LS = 55′ 17″, welchen wir mit E bezeichnen wollen. Es kommt jetzt auf die Auffindung des durch die Parallaxe geänderten scheinbaren Abstandes E′ dieser Mittelpuncte an. Im Dreiecke ZSP ist ZP, PS und der Stundenwinkel der Sonne ZPS = 37° 20′ 45″ gegeben, man findet also den Abstand der Sonne vom Zenith ZS = 57° 2′ 56″,2 = q, und den parallactischen Winkel der Sonne ZSP = 24° 48′ 33″,5. Trifft die Sonnenfinsterniß Vormittags: so befindet sich der Mond zwischen der Sonne und dem Meridian, wie man es in der Figur sehen kann; der Stundenwinkel des Mondes ist kleiner, als der Stundenwinkel der Sonne, und der Winkel ZSL ist gleich der Differenz der Winkel (PSL — PSZ). Trifft hingegen die Sonnenfinsterniß Nachmittags: so ist beim Eintritt derselben die Sonne näher dem Meridian, als der Mond; der Stundenwinkel des Mondes demnach größer, als der Stundenwinkel der Sonne; und der Winkel ZSL gleich der Summe der Winkel (PSL + PSZ), wie man sich durch eine leicht zu entwerfende Figur überzeugen kann. Diese Bemerkung hat Delambre bei der Erläuterung seiner Methode, wo nur das Abziehen des Winkels a oder PSZ angegeben wird, nicht gemacht; was zu

irrigen Resultaten verleiten könnte. In unserm Beispiele ist der Winkel $PSL = 8^\circ 10' 20'',4$. $PSZ = 24^\circ 48' 33'',5$; weil nun die Sonnenfinsterniß Nachmittags trifft: so ist der Winkel $ZSL = 32^\circ 58' 53'',9 = S'$. Die Parallaxe dieses Winkels giebt uns den scheinbaren Abstand der Mittelpuncte. Sucht man denselben mittelst der oben angegebenen Gleichungen für Π und E'; indem für die Breite von Wilna die Differenz der Horizontalparallaxe der Sonne und des Mondes $\pi = 53' 40''$ gesetzt wird, und indem man den Radius der Mondscheibe um $7'',5$ vergrößert, wovon die Ursache weiter unten vorkommen soll: so ist

$$\begin{array}{rl} \text{l. sin}\,\pi = & 8,1934355 + \\ \text{l. sin}\,q = & 9,9238321 + \\ \text{Comp. l. sin}\,E = & 1,7936496 + \\ \hline \text{l. m} = & 9,9109172 + \\ \text{l. sin}\,S' = & 9,7358944 + \\ \hline & 9,6468116 + \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. m} = & 9,9109172 + \\ \text{l. cos}\,S' = & 9,9236818 + \\ \hline & 9,8345990 + \end{array}$$

$$1 - 0,68328 = 0,31672.$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. m. sin}\,S' = & 9,6468116 + \\ \text{l. } 0,31672 = & 9,5006755 + \\ \hline \text{l. tang}\,\Pi = & 0,1461361 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Pi = & 54^\circ 27' 46'',1 \\ S = & 32^\circ 58' 53'',9 \\ \hline \Pi + S' = & 87^\circ 26' 40'' = S''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. sin}\,\pi = & 8,1934355 + \\ \text{l. cos}\,q = & 9,7355370 + \\ \text{Comp. l. sin}\,E = & 1,7936496 + \\ \hline \text{l. tang}\,u = & 9,7226221 + \end{array} \qquad \begin{array}{rl} u = & 27^\circ 50' \; 0'' \\ E = & 55' 17'' \\ \hline E + u = & 28^\circ 45' 17'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. sin}\,S' = & 9,7358944 \\ \text{l. sin}\,E = & 8,2063504 \\ \text{l. cos}\,u = & 9,9466043 \\ \hline \text{l. d. Zählers} = & 7,8888491 \\ \text{Comp. l. d. Nenners} = & 0,0575874 \\ \hline \text{l. tang}\,E' = & 7,9464365 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. sin}\,S'' = & 9,9995679 \\ \text{l. cos}\,(E+u) = & 9,9428447 \\ \hline \text{l. d. Nenners} = & 9,9424126 \\ & 0,0575874 \end{array}$$

$$E' = E + \sigma = 30' 23'',3$$

$$\begin{array}{r} \tfrac{1}{2}☽ = 14'50'',6 \\ \tfrac{1}{2}⊙ = 15'54'',8 \\ \hline 30'45'',4 \\ 30'23'',3 \\ \hline 22'',1 \end{array}$$

Mithin derselbe Abstand der Mittelpuncte wie oben. Der Winkel $\Pi + S' = 87^\circ 26' 40'' = S''$ zeigt uns, daß, wenn man den höchsten Punct der Sonnenscheibe nimmt, in dieser Entfernung von ihm nach West, das heißt auf der rechten Seite, oder $2^\circ,5$ über dem horizontalen Durchmesser der Sonne, der Mond mit der Sonne zusammenstoßen wird. Im astronomischen Fernrohre hingegen umgekehrt; d. h. $2^\circ,5$ unter dem horizontalen Durchmesser links.

Parallaxe der Höhe.

§. 37.

Zur Ergänzung der Lehre über die Parallaxen wollen wir noch einige Untersuchungen über die Höhenparallaxe anstellen. Es stelle (Fig. 12. Tab. II.) C den Mittelpunct der Erde vor; M sey ein Punct auf ihrer Oberfläche; Z das Zenith; L der Ort des Mondes oder eines Planeten; ZML der mit der Parallaxe behaftete Abstand vom Zenith; $ZCL = q$ aber der wahre Abstand vom Zenith *).

$$CL : CM = \sin ZML : \sin MLC,$$

das heißt:

$$r : R = \sin(q + \mu) : \sin \mu;$$

wo μ die Höhenparallaxe anzeigt.

$$\sin \mu = \frac{R}{r} \sin(q + \mu). \quad [XIX]$$

Ist $q + \mu = 90^\circ$: so erhält man $\sin \mu = \frac{R}{r} = \sin \pi$ für die

*) Anmerkung. Im Original ist hier ein Druckfehler; es steht nämlich da $ZML = q$.

Horizontalparallaxe, die wir immer mit π bezeichnen wollen. Da nun aber die Erde keine Kugel, sondern ein Sphäroid ist, und die Puncte ihrer Oberfläche eine ungleiche Entfernung **R** vom Mittelpuncte der Erde haben: so wird in den astronomischen Ephemeriden die Horizontalparallaxe des Mondes unterm Aequator angegeben; die man öfter in die Parallaxe des Ortes der Beobachtung oder der Berechnung, mit gehöriger Berücksichtigung der Gestalt der Erde, umformen muß. Diese Umformung wird aber mittelst des Verhältnisses, das der Halbmesser oder der Abstand des Punctes der Erdoberfläche vom Mittelpuncte der Erde unterm Aequator zu einem ähnlichen Abstande unter irgend einer gegebenen Breite hat, vollzogen. Betrachtet man die Erde als ein Ellipsoid, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, so beweiset man in der Geometrie der krummen Linien: daß in der Ellipse *)

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi$$

$$R = a\sqrt{\left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}\right\}} = b\sqrt{\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}\right\}};$$

wo **a** die große, **b** aber die kleine Axe der Ellipse ist; φ die aus den Beobachtungen gegebene scheinbare Breite des Beobachtungsortes; φ' die verbesserte Breite desselben Ortes; und folglich $\varphi - \varphi'$ der Winkel zwischen der Normale des Beobachtungsortes und der Linie, welche nach dem Mittelpuncte der Erde geht. Wird die Gestalt der Erde $\frac{329}{330} = \frac{b}{a}$ gesetzt, und

---

*) Anmerkung. Ueber die Lehren von der Ellipse überhaupt kann der Leser Herrn Prof. Brandes „Lehrbuch der höheren Geometrie in analytischer Darstellung,“ I. Theil, 8. Abschnitt, nachsehen. — Ueber die hier folgenden Untersuchungen aber kann man auch Bohnenberger's Astronomie, Tübingen 1811, pag. 197 u. f.; oder das schon oben angeführte Werk von Littrow, I. Th. pag. 87, vergleichen. [F]

$b=1$ angenommen: so erhält man den Halbmesser des Aequators $R=1{,}0030395$; $l.R=0{,}00131803$; für die Breite von Wilna 54° 41′, ist $R'=1{,}0010212$; $l.R'=0{,}00044326$; und also die Horizontalparallaxe für Wilna $=\frac{R'}{R}\sin\pi$; wo π die Horizontalparallaxe unterm Aequator anzeigt. In dem oben gegebenen Beispiele für die Sonnenfinsterniß war der Unterschied der Parallaxe der Sonne und des Mondes unterm Aequator $\pi=53'46'',66$.

$$l.\frac{R'}{R}=9{,}9991252$$
$$l.\sin\pi=8{,}1943103$$
$$l.\sin\pi'=8{,}1934355$$

$\pi'=53'40''$ die Horizontalparallaxe für Wilna.

Will man die Horizontalparallaxe irgend eines Planeten haben, so muß der Halbmesser der Erde durch die Entfernung des Planeten von der Erde dividirt werden; da nun aber der Halbmesser der Erde gegen die Entfernung der Sonne von der Erde gleich ist der Horizontalparallaxe der Sonne $=8'',7$, so erhält man, wenn $8'',7$ durch die Entfernung des Planeten von der Erde dividirt wird, die Horizontalparallaxe des Planeten. Wird diese Horizontalparallaxe durch $\sin(q+\mu)$, d. h. durch den aus den Beobachtungen erhaltenen Abstand vom Zenith multiplicirt, so erhält man die Höhenparallaxe.

Die Gleichung [XIX] giebt folgende Proportion:

$$1:\sin\pi=\sin(q+\mu):\sin\mu,$$

und folglich

$$1+\sin\pi:1-\sin\pi=\sin(q+\mu)+\sin\mu:\sin(q+\mu)-\sin\mu;$$

das heißt

$$\frac{1+\sin\pi}{1-\sin\pi}=\frac{\sin(q+\mu)+\sin\mu}{\sin(q+\mu)-\sin\mu}$$

$$=\frac{\sin(\frac{1}{2}q+\mu)\cos\frac{1}{2}q}{\cos(\frac{1}{2}q+\mu)\sin\frac{1}{2}q}=\frac{\tan(\frac{1}{2}q+\mu)}{\tan\frac{1}{2}q};$$

nach §. 13. ist aber

$$\frac{1+\sin\pi}{1-\sin\pi}=\tang^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\pi);$$

und somit erhellt auch folgende Gleichung:

$$\tang(\tfrac{1}{2}q+\mu)=\tang\tfrac{1}{2}q.\ \tang^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\pi).\quad [XX]$$

Auf diese Formel ist Lexell durch eine ziemlich langwierige Rechnung gekommen. Es wird nämlich in derselben der scheinbare Abstand vom Zenith durch den wahren Abstand, und durch die Horizontalparallaxe des Aequators ausgedrückt.

Fig. 12. Tab. II. sieht man, daß

$$MQ=R\sin q;$$
$$CQ=R\cos q;$$

und folglich

$$\tang MLC=\frac{MQ}{CL-CQ};$$

was man auch noch aus der Gleichung [XIX] ableiten kann, nämlich

$$\tang\mu=\frac{\sin\pi.\ \sin q}{1-\sin\pi.\ \cos q}\quad [XXI]$$

$$\mu=\frac{\sin\pi.\ \sin q}{\sin 1''}+\frac{\sin^2\pi.\ \sin 2q}{\sin 2''}+\frac{\sin^3\pi.\ \sin 3q}{\sin 3''}$$
$$+\frac{\sin^4\pi.\ \sin 4q}{\sin 4''}+\text{ etc. §. 18.}$$

$$\tang(q+\mu)=\frac{\tang q+\tang\mu}{1-\tang q.\ \tang\mu}.$$

Wird in dieser Gleichung für $\tang\mu$ der Werth nach [XXI] gesetzt, so erhält man

$$\tang(q+\mu)=\frac{\sin q}{\cos q-\sin\pi};$$

$$\cotg(q+\mu)=\frac{\cos q-\sin\pi}{\sin q};$$

nun haben wir mit k die Höhe über dem Horizont bezeichnet, es ist also

$$q=90^\circ-k;\ q+\mu=90^\circ-k+\mu=90^\circ-(k-\mu)$$
$$\cotg(q+\mu)=\tang(k-\mu);$$

$$\tang(k-\mu)=\frac{\sin k-\sin\pi}{\cos k}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(k-\pi)\cos\frac{1}{2}(k-\pi)}{\cos k}. \quad [XXII]$$

Die letzte sehr bequeme Formel zur Rechnung ist von Delambre; es wird in derselben die scheinbare Höhe durch die wahre und durch die Horizontalparallaxe ausgedrückt.

Alle Parallaxen, nämlich: die Parallaxe der Länge und Breite, die Parallaxe der Rectascension und Declination u. s. w., sind nur immer Aenderungen der Höhenparallaxe, und man könnte auch alle aus der Höhenparallaxe, aber durch eine weitläuftigere und verwickeltere Rechnung, als die eben hier in diesem Werkchen auseinandergesetzte ist, ableiten.

Einfluß der Parallaxe auf die Mondscheibe, und Vergrößerung dieser Scheibe.

§. 38.

Man denke sich zwei Verticalkreise, die einander im Zenith durchschneiden, und welche durch die zwei Endpuncte des horizontalen Durchmessers des Mondes gehen; so nähern sich diese Kreise nach dem Zenith zu, und entfernen sich von einander nach dem Horizont hin. Die Parallaxe, die den Mond nach dem Horizont herunterdrückt, bringt ihn in einen größern Raum und vergrößert demnach dessen horizontalen Durchmesser, und indem wieder der untere Rand des Mondes tiefer als der obere steht, so wird auch dessen verticaler Durchmesser vergrößert. Auch steht der Mittelpunct der Erde weiter vom Monde ab, als irgend ein Punct der ihm zugekehrten Oberfläche derselben; es wird sich demnach der Mond, von der Oberfläche der Erde aus gesehen, größer, als aus dem Mittelpuncte derselben, zeigen müssen. Nun erhält man aber aus den Mondtafeln den Durchmesser des Mondes für den Mittelpunct der Erde; wünscht man demnach den Durchmesser desselben, von der Oberfläche der

Erde aus gesehen, zu haben: so muß bei dem aus den Tafeln genommenen Durchmesser des Mondes eine Vergrößerung angebracht werden. Zur Berechnung der eben genannten Vergrößerung hat man verschiedene Gleichungen. Wir wollen hier die Olbers'schen, die sich unmittelbar aus dem in §. 34. auseinandergesetzten Verfahren ergeben, wählen.

Es sey (Fig. 10. Tab. II.) S der Mittelpunct der Erde, W ein Punct ihrer Oberfläche, Z der Ort des Mondes, SZ$=$r die Entfernung des Mondes vom Mittelpuncte der Erde, WZ$=\Delta$ die Entfernung von der Oberfläche der Erde. Die übrigen in §. 34. angeführten Bezeichnungen der Linien und Winkel werden auch hier beibehalten, nur setze man dort noch E$=$o:

$$WZ = \Delta = \frac{Wg}{\cos p'} = \frac{TC}{\cos p'},$$

$$TC = \frac{Tp}{\cos D'} = \frac{SP - SQ}{\cos D'},$$

$$TC = \frac{r \cos p.\ \cos D - R.\ \cos s.\ \cos N}{\cos D'};$$

also

$$\Delta = \frac{r \cos p.\ \cos D - R.\ \cos s.\ \cos N}{\cos p' \cos D'};$$

in dieser Gleichung bezeichnet p die wahre, p' die scheinbare Breite des Mondes; D die wahre, D' die scheinbare Länge des Mondes; SW$=$R; N ist die Länge des Zeniths, s dessen Breite.

Der Mond müßte uns aus dem Mittelpuncte der Erde unter einem Winkel T; von der Oberfläche der Erde aus unter einem Winkel T' erscheinen. Die Sinus dieser Winkel sind im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen, also:

$$\sin T : \sin T' = \Delta : r;$$

$$\sin T' = \frac{r.\ \sin T}{\Delta};$$

wird der oben angegebene Werth für Δ hier in diese Gleichung gesetzt, so ist

$$\sin T' = \frac{r.\ \sin T.\ \cos p'.\ \cos D'}{r.\ \cos p.\ \cos D - R.\ \cos s.\ \cos N},$$

$$\sin T' = \frac{\sin T.\ \cos p'.\ \cos D'}{\cos p.\ \cos D - \sin \pi.\ \cos s.\ \cos N}.\ [XXIII]$$

und hieraus erhält man T′—T für die Vergrößerung der Scheibe. In dieser Gleichung ist der Nenner eben so, wie in den Gleichungen [I], [II]; und mithin wird die ganze Rechnung bedeutend abgekürzt. Es ist bereits bei der Sonnenfinsterniß des 7. Septembers 1820, p′=2′28″,6; D′=164° 14′49″,3 gefunden worden. Der Werth des Nenners ist—0,954178, sein Logarithmus 9,9796295—; T=14′43″,1.

$$\begin{aligned} l.\sin T &= 7{,}6315342+ \\ l.\cos p' &= 9{,}9999999+ \\ l.\cos D' &= 9{,}9833742- \\ & \quad 7{,}6149083- \\ l.\ d.\ Nenners &= 9{,}9796295- \\ l.\sin T' &= 7{,}6352788+ \end{aligned}$$

T′=14′50″,6
T=14′43″,1
7″,5 die Vergrößerung der Mondscheibe.

V.

Lage der Himmelskörper auf ihrer eigenen Bahn.

Die trigonometrischen Elemente der Bahn eines Himmelskörpers.

§. 39.

Die Ebenen aller, von den sich bewegenden Himmelskörpern der Sonnenwelt beschriebenen Bahnen gehen durch den Mittelpunct der Sonne, als durch das Centrum ihrer Bahn; sie müssen demnach die Ecliptik unter einem gewissen Winkel

in zwei Puncten, die man Knoten (Nodi) nennt, durchschneiden. Derjenige dieser Knoten, von welchem sich der Himmelskörper nach dem Nordpole hin über die Ecliptik erhebt, wird der aufsteigende Knoten (Nodus ascendens); der andere hingegen, von welchem sich das Gestirn unter die Ecliptik senkt, der niedersteigende Knoten (Nodus descendens) genannt. Man kann hier die Lage des Himmelskörpers in einer doppelten Beziehung betrachten: ein Mal als beschreibe derselbe eine Bahn von einer gewissen Figur oder Gestalt, die bestimmt werden soll; der Ort in dieser Bahn muß dann auf die jener Figur eigenthümlichen Puncte, wie z. B. in der Ellipse auf den Brennpunct, die Excentricität, die große Axe u. s. w. bezogen, und daraus die Stücke, welche man die Elemente der Bahn eines Himmelskörpers (Elementa motus corporis) nennt, abgeleitet werden; und eben die Bestimmung dieser Lage, als von den Lehren der Mechanik und höhern Geometrie abhängig, wird bei der gegenwärtigen Schrift gänzlich ausgeschlossen. Das andere Mal kann man den Himmelskörper als sich in dem kugelförmigen Raume bewegend betrachten; die geraden Linien, welche sich vom Mittelpuncte der Sonne oder von dem Mittelpuncte der Erde zu demselben ziehen lassen, zeigen uns die Lage dieses Himmelskörpers an der Kugel von unbestimmtem Halbmesser; man kann dieß als die Projection jenes Körpers auf die Kugelfläche betrachten. Die durch diesen Körper und die bekannten Puncte der Ecliptik gelegten Ebenen, welche Bogen größter Kreise darstellen, und welche einander auf verschiedene Art durchschneiden und sphärische Dreiecke bilden, deren Auflösung gänzlich der sphärischen Trigonometrie anheim fällt, zeigen uns nur die Lage der Bahn und den Ort des Himmelskörpers in Beziehung auf die Ecliptik, und lehren uns weder die Gestalt der beschriebenen Bahn, noch die Dauer der Zeit, in welcher dieselbe beschrieben wird, kennen. Es kann dieß nur als Vorbereitung zu denjenigen Untersuchungen, welche erst durch

die höhere Geometrie und Mechanik ausgeführt werden können, betrachtet werden. Ueberhaupt lassen sich die Elemente der Bahn eines Himmelskörpers in die einfachen (hieher gehörigen) trigonometrischen Elemente eintheilen, und dieß wären der Neigungswinkel der Ebene der Bahn gegen die Ebene der Ecliptik und die Länge des Knotens, und in die geometrisch-mechanischen Elemente, wie es bei der elliptischen Bahn erstens die Epoche, das heißt die mittlere Länge des Himmelskörpers für einen gegebenen Zeitpunct ist. Für diese Epoche nimmt man gewöhnlich den Anfang des Jahres, d. h. den Mittag des 31. Decembers in den gemeinen Jahren, und den Mittag des 1. Januars in den Schaltjahren; zweitens die Excentricität, oder der Exponent des Verhältnisses des halben Abstandes der Brennpuncte in der Ellipse zu ihrer halben großen Axe; drittens die Länge des Periheliums, oder des kürzesten Abstandes von der Sonne; viertens die halbe große Axe der elliptischen Bahn, oder die mittlere Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne. Hieraus wird dann die mittlere tägliche Bewegung abgeleitet. Bei der parabolischen Bahn, wie z. B. bei einem Kometen, sind die Elemente der Bahn: erstens das Perihelium, oder der kleinste Abstand des Kometen von der Sonne; zweitens die Länge des Periheliums; drittens der Durchgang des Kometen durchs Perihelium; viertens die mittlere tägliche Bewegung. In diesen Elementen sind, wie wir sehen, die Gesetze der Bewegung und die Gestalt der Bahn, die ein Himmelskörper beschreibt, enthalten, was aber der Gegenstand einer andern Wissenschaft ist.

Es sey (Fig. 13. Tab. I.) ♈ der Anfangspunct von dem Zeichen des Widders, von welchem man die Längen auf der Ecliptik ♈CA rechnet; B stelle den heliocentrischen Ort des Himmelskörpers auf seiner eignen Bahn vor; eine Ebene durch

B und durch die Sonne gelegt, schneide die Ecliptik in C, so wird C der aufsteigende Knoten seyn. Den Bogen des größten Kreises BC nennt man das Argument der Breite (Argumentnm latitudinis); dieser Bogen zeigt, daß der Körper eine Breite hat, denn ohne diese wäre der Bogen nicht da. Es ist dieß, wie man sieht, der Abstand des Körpers vom Knoten auf seiner eigenen Bahn betrachtet. Aus B fälle man einen durch den Pol der Ecliptik gehenden Bogen eines größten Kreises, und mithin senkrecht auf dieselbe: so wird $\gamma A = l$ die heliocentrische Länge des Körpers B seyn; $BA = p$ die heliocentrische Breite desselben; $\gamma C = \Omega$ die Länge des Knotens; $CA = l - \Omega$ die Entfernung des Körpers B vom Knoten auf der Ecliptik; diese Entfernung kann man auch das ecliptische Argument der Breite nennen; der Winkel $BCA = i$ ist die Neigung der Bahn des Himmelskörpers B gegen die Ecliptik. Wir haben demnach das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC, in welchem vier in der Astronomie wichtige Größen, nämlich $l - \Omega$, p, u, i, vorkommen; es müssen nun die Relationen zwischen diesen Größen aufgesucht werden, damit, wenn man einige von denselben als gegeben betrachtet, die übrigen gefunden werden können. Noch muß untersucht werden, welchen Einfluß die Veränderung einiger von diesen Größen auf die Veränderung der anderen hat, und hiermit sollen unsere Untersuchungen geschlossen werden. Die Größen i und Ω sind die sogenannten trigonometrischen Elemente der Bahn, man erhält durch dieselben die Lage der Ebene, auf welcher die Bahn des Himmelskörpers liegt.

Die in §. 9. gewiesenen Gleichungen, wenn die Bogen und Winkel in die jetzige Bedeutung übersetzt werden, das heißt wenn man $a = u$; $b = l - \Omega$; $C = i$; $c = p$ annimmt, geben folgende:

$$\text{I. } \operatorname{tang}(l-\Omega) = \cos i . \operatorname{tang} u \quad [e]\ \S. 9.$$
$$\text{II. } \operatorname{tang} p = \operatorname{tang} i . \sin(l-\Omega) \quad [f]$$
$$\text{III. } \sin p = \sin i . \sin u \quad [b]$$
$$\text{IV. } \cos u = \cos p . \cos(l-\Omega). \quad [a]$$

Die Gleichungen I. und IV. zeigen: daß die Bogen $l-\Omega$ und u zu einem und demselben Quadranten gehören; denn sie werden durch die nämlichen trigonometrischen Linien, wenn i als ein spitziger, d. h. als ein zwischen 0° und 90° enthaltener Winkel betrachtet wird, ausgedrückt; ist aber i ein stumpfer, also ein zwischen 90° und 180° enthaltener Winkel, und mithin die Bewegung des Himmelskörpers rückläufig: so gehören die Winkel $l-\Omega$, $360°-u$ zu einem und demselben Quadranten. Durch diese Bemerkung wird der Zweifel in Beziehung auf den Winkel $l-\Omega$, wenn man u als bestimmt voraussetzt, gehoben.

Wird in I. die Tangente in ihren Quotienten aufgelös't, und $\cos i = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i$ gesetzt:
so erhellt
$$\sin(l-\Omega) \cos u = \sin u . \cos(l-\Omega) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i . \sin u . \cos(l-\Omega),$$
oder
$$\text{V. } \sin(u-l+\Omega) = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i . \sin u . \cos(l-\Omega);$$
wird aus der III. Gleichung für
$$\sin u = \frac{\sin p}{\sin i} = \frac{\sin p}{2 \sin \frac{1}{2} i . \cos \frac{1}{2} i} \text{ gesetzt:}$$
so erhält man
$$\text{VI. } \sin(u-l+\Omega) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i . \sin p . \cos(l-\Omega),$$
oder indem man nach IV. $\cos(l-\Omega) = \frac{\cos u}{\cos p}$ annimmt: so ist
$$\text{VII. } \sin(u-l+\Omega) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i . \operatorname{tang} p . \cos u.$$

Setzt man nun noch in der V. Gleichung
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} i = 1 - \cos^2 \tfrac{1}{2} i:$$
so folgt
$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} i . \sin u . \cos(l-\Omega) = \sin u . \cos(l-\Omega) + \cos u . \sin(l-\Omega);$$

und also

$$\text{VIII.}\ \sin(u+l-\Omega)=2\cos^2\tfrac{1}{2}i.\ \sin u.\ \cos(l-\Omega);$$

da nun aber nach der III. Gleichung

$$\sin u=\frac{\sin p}{\sin i}=\frac{\sin p}{2\sin\frac{1}{2}i.\ \cos\frac{1}{2}i},$$

so ist $\text{IX.}\ \sin(u+l-\Omega)=\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}i.\ \sin p.\ \cos(l-\Omega);$

nun ist aber wiederum nach IV.

$$\cos(l-\Omega)=\frac{\cos u}{\cos p};$$

und folglich erhellt auch

$$\text{X.}\ \sin(u+l-\Omega)=\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}i.\ \text{tang}\,p.\ \cos u.$$

Die vorstehenden Gleichungen, welche oft in der Astronomie ihre Anwendung finden, hat der Ritter Gauß *), aber ohne Beweis und Construction, aufgestellt.

Der Bogen $u-l+\Omega$ ist $=u-(l-\Omega)$, wenn i spitz, oder ein zwischen 0° und 90° enthaltener Winkel ist; hingegen ist der Bogen $u+(l-\Omega)=u-(\Omega-l)$, wenn i stumpf, oder ein zwischen 90° und 180° enthaltener Winkel ist; eben dieser Bogen wird in der Astronomie die Reduction auf die Ecliptik (Reductio ad eclipticam) genannt. Es ist dieß, wie man sieht, die Differenz zwischen der Hypotenuse BC und dem Bogen CA; das heißt: die Differenz zwischen der heliocentrischen Länge ♈CA des Planeten, und der Länge auf seiner eigenen Bahn $\Omega+CB$. Um sich letztere an der Figur zu verdeutlichen, müßte der Bogen BC unter die Ecliptik verlängert, und auf dem so verlängerten Bogen ein Stück gleich dem Bogen ♈$C=\Omega$ von dem Puncte C ausgeschnitten werden; man bekäme alsdann ebenso den Anfangspunct für die Länge des Planeten auf der Bahn, wie es der Punct ♈ für die Länge auf der Ecliptik ist. Es wird demnach die Länge in der Bahn immer $\Omega+u$ seyn; die Astronomen drückten dieselbe früher mit $\Omega\pm u$ aus, weil sie die Knoten bei der rückläufigen Bewegung

---

*) Theoria motus corporum coelestium, pag. 48.

mit einander vertauschten, was aber, wenn man nur den Winkel i als zwischen 0° und 180° enthalten betrachtet, nicht nöthig ist. Mehrere Gleichungen für einen und denselben Bogen und Winkel dienen sowohl zur Bestätigung der Rechnung selbst, als auch zur Hebung jeder Zweideutigkeit in Beziehung auf den Winkel, wenn welche vorkommen sollte.

Als Beispiel wollen wir hier die Bahn der Vesta im September 1819 nehmen, nämlich den 22. um Mitternacht in Wilna: Für diese Zeit ist die heliocentrische Länge der Vesta $l = 0_z\ 0°\ 29'\ 59''$; die heliocentrische Breite derselben südlich $p = -6°\ 57'\ 47''$; die Neigung der Bahn $i = 7°\ 8'\ 5''$.

III. Gleichung.
$$\text{l. sin}\, p = 9{,}0836077 -$$
$$\text{l. sin}\, i = 9{,}0941315 +$$
$$\text{l. sin}\, u = 9{,}9894762 -$$
$$u = -77°\ 26'\ 15'';\quad 282°\ 33'\ 45''.$$

II. Gleichung.
$$\text{l. tang}\, p = 9{,}0868227 -$$
$$\text{l. tang}\, i = 9{,}0975074 +$$
$$\text{l. sin}\,(l - \Omega) = 9{,}9893153 -$$
$$l - \Omega = -77°\ 20'\ 33'';\quad 282°\ 39'\ 27''.$$

I. Gleichung.
$$\text{l. cos}\, i = 9{,}9966241 +$$
$$\text{l. tang}\, u = 0{,}6520080 -$$
$$\text{l. tang}\,(l - \Omega) = 0{,}6486321 -$$
$$l - \Omega = -77°\ 20'\ 33''.$$

IV. Gleichung.
$$\text{l. cos}\, p = 9{,}9967850 +$$
$$\text{l. cos}\,(l - \Omega) = 9{,}3406832 +$$
$$\text{l. cos}\, u = 9{,}3374682 +$$
$$u = -77°\ 26'\ 15''$$

V. Gleichung.
$$\text{l. sin}^2\, \tfrac{1}{2} i = 7{,}5878876 +$$
$$\text{l. } 2 = 0{,}3010300 +$$
$$\text{l. sin}\, u = 9{,}9894762 -$$
$$\text{l. cos}\,(l - \Omega) = 9{,}3406832 +$$
$$\text{l. sin}\,(u - l + \Omega) = 7{,}2190770 -$$
$$u - l + \Omega = -5'\ 42''.$$

VI. Gleichung. $\;l.\,tang\tfrac{1}{2}i = 8{,}7947861 +$

$$l.\,\sin p = 9{,}0836077 -$$
$$l.\cos(l - \Omega) = 9{,}3406832 +$$
$$l.\sin(u - l + \Omega) = 7{,}2190770 -$$

Ganz das Nämliche giebt die Gleichung VII. Die Gleichungen VIII., IX., X. können bei den bis jetzt bekannten Planeten, deren Neigung gegen die Ecliptik spitzwinklig ist, und die keine heliocentrische rückläufige Bewegung haben, nicht gebraucht werden.

Uebrigens zeigt die hier geführte Rechnung bei der Vesta, daß die Länge ihres niedersteigenden Knotens $l - (l - \Omega) = \Omega = 77^\circ\,50'\,32''$ sey; dessen Supplement aber, was in den Tafeln gebraucht wird, oder die Länge des aufsteigenden Knotens $180^\circ - \Omega = 102^\circ\,9'\,28''$; oder $360^\circ - (180^\circ + \Omega) = 180^\circ - \Omega = 102^\circ\,9'\,28''$; $u = -77^\circ\,26'\,15''$.

$$l - (l - \Omega) + u = u + \Omega = 0^\circ\,24'\,17''.$$

$u - (l - \Omega) =$ der Reduction auf die Ecliptik $= -5'\,42''$; hieraus folgt die heliocentrische Länge der Vesta $u + \Omega - u + l - \Omega = l = 0^\circ\,29'\,59''$, wie man sie aus den Tafeln erhielt.

Differentialgleichungen der trigonometrischen Elemente der Bahn.

§. 40.

Wird die Gleichung III. §. 39. in Beziehung auf p, i, u, differentiirt:

$$\cos p.\ dp = \sin u.\ \cos i.\ di + \sin i.\ \cos u.\ du;$$

nun ist bekanntlich

$$\cos\varphi = \cot g\,\varphi.\ \sin\varphi;$$

folglich $\quad \cot g\,p.\ dp = \cot g\,i.\ di + \cot g\,u.\ du.$

$$dp = \frac{\cot g\,i}{\cot g\,p}\,di + \frac{\cot g\,u}{\cot g\,p}\,du$$

$$= \frac{tang\,p}{tang\,i}\,di + \frac{tang\,p}{tang\,u}\,du;$$

da nun aber aus II. $\frac{\text{tang}\, p}{\text{tang}\, i} = \sin(l - \Omega)$, aus III. und IV. $\frac{\text{tang}\, p}{\text{tang}\, u} = \sin i. \cos(l - \Omega)$ ist: so erhält man

$$dp = di. \sin(l - \Omega) + du. \sin i. \cos(l - \Omega). \quad [m]$$

Wird die Gleichung I. differentiirt: so ist

$$\frac{d(l - \Omega)}{\cos^2(l - \Omega)} = -di. \sin i. \text{tang}\, u + \frac{\cos i}{\cos^2 u} du;$$

nun ist nach IV.

$$\cos(l - \Omega) = \frac{\cos u}{\cos p};$$

nach III. aber

$$\sin i. \sin u = \sin p;$$

werden diese Werthe in die vorhergehende Gleichung eingeführt: so hat man

$$d(l - \Omega) = -\text{tang}\, p. \cos(l - \Omega)\, di + \frac{\cos i}{\cos^2 p} du. \quad [n]$$

Die Gleichungen [m], [n] geben uns das Differential der heliocentrischen Länge und Breite, ausgedrückt durch das Differential des Arguments der Breite u und durch das Differential der Neigung der Bahn i.

Nun wissen wir aber aus §. 34., daß, wenn r der Abstand des Planeten von der Sonne, und p seine heliocentrische Breite ist, man für die abgekürzte Distanz oder für die Projection auf die Ecliptik

$$r' = r. \cos p \text{ erhält,}$$

und mithin

$$dr' = dr. \cos p - r. \sin p. dp;$$

setzt man für dp den in [m] gefundenen Werth, so ist sofort

$$dr' = \cos p. dr - r. \sin p. \sin(l - \Omega)\, di - r. \sin p. \sin i. \cos(l - \Omega)\, du. \quad [r]$$

Ist di und du in der letzten Gleichung durch Secunden des Winkels gegeben, so muß man dieselben, um sie in gerader Linie, wie dr und dr', zu haben, noch mit sin 1″ mul-

tipliciren; oder es muß dr und dr' durch $\sin 1''$, um alles in Secunden zu erhalten, dividirt werden.

Die Gleichungen [m], [n], [r] finden ihre Anwendung bei genaueren astronomischen Rechnungen; bemerkt man nämlich eine kleine Aenderung in der Neigung der Bahn di und im Argument der Breite du auf der Bahn CB, und man wünscht zu wissen, welche Aenderung dadurch die heliocentrische Breite dp und das ecliptische Argument der Breite $d(l-\Omega)$ erleidet; und wiederum, wenn man einen Fehler in i und u begangen hat, und erfahren will, welcher Fehler dadurch in p, $(l-\Omega)$, r' entstanden sey. Der bei weitem noch größere Nutzen dieser Gleichungen zeigt sich bei der Verbesserung der Tafeln, oder vielmehr der Elemente, von welchen die Tafeln der Planeten abhängen.

Vergleicht man die Beobachtungen mit den berechneten Tafeln, so erhält man kleine Zahlendifferenzen in der heliocentrischen Länge dl und in der heliocentrischen Breite dp; wird dieser in Zahlen gegebene Werth für dp in die Gleichung [m] eingeführt: so giebt jede Beobachtung eine solche Gleichung; zwei Beobachtungen werden demnach zwei solche Gleichungen [m] geben, durch deren Hülfe man du wegschafft, und den Werth für di, d. h. die Verbesserung der Neigung der Bahn in Zahlen erhält. Hat man aber einmal di: so findet man auch den Werth von du, und wird dieser Werth in die Gleichung [n] eingeführt und für dl die Differenz in der Länge zwischen den Beobachtungen und den Tafeln gesetzt: so bekömmt man $d\Omega$ für die Verbesserung der Länge des Knotens. Wird eine große Anzahl von Beobachtungen benutzt, so erhält man mehrere Gleichungen als unbekannte Größen, und folglich Bedingungsgleichungen, denen Genüge geschehen muß. Damit aber die Verbesserung der angeführten Elemente mit Sicherheit unternommen werden könne: so wählt man am liebsten dazu

die Beobachtungen der Opposition (przeciwlegtosc) des Planeten mit der Sonne, denn zu dieser Zeit ist die aus dem Mittelpuncte der Erde gesehene Länge des Planeten eben so, als sähe man dieselbe aus dem Mittelpuncte der Sonne. Mehrere Oppositionen liefern mehrere Bedingungsgleichungen. Hiemit eröffnet sich die Lehre von denjenigen Methoden, wie ähnlichen Gleichungen Genüge geleistet werden kann; was aber nicht mehr zu unseren Untersuchungen hieher gehört.

Wie aus zwei oder drei heliocentrischen Längen und heliocentrischen Breiten die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn für den Himmelskörper gefunden werden kann.

§. 41.

Diese Aufgabe hat man am öftersten bei den Kometen, wenn nämlich aus drei gegebenen Beobachtungen die Bahn desselben gefunden werden soll, zu lösen.

Man nenne die drei heliocentrischen Längen

$$l, l', l'';$$

die drei heliocentrischen Breiten

$$p, p', p''.$$

Die Gleichung II. §. 39. giebt

$$\tan i = \frac{\tan p}{\sin(l - \Omega)} = \frac{\tan p'}{\sin(l' - \Omega)} = \frac{\tan p''}{\sin(l'' - \Omega)}; \quad [z]$$

und hieraus sofort folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tan p.\ \sin(l' - \Omega) &= \tan p'.\ \sin(l - \Omega) \\ \tan p.\ \sin(l'' - \Omega) &= \tan p''.\ \sin(l - \Omega) \quad [z'] \\ \tan p'.\ \sin(l'' - \Omega) &= \tan p''.\ \sin(l' - \Omega). \end{aligned}$$

Jede von diesen Gleichungen giebt uns immer denselben Werth für $\tan \Omega$, nämlich:

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{\operatorname{tang}p.\ \sin l' - \operatorname{tang}p'.\ \sin l}{\operatorname{tang}p.\ \cos l' - \operatorname{tang}p'.\ \cos l}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}p.\ \sin l'' - \operatorname{tang}p''.\ \sin l}{\operatorname{tang}p.\ \cos l'' - \operatorname{tang}p''.\ \cos l} \quad [z'']$$

$$= \frac{\operatorname{tang}p'.\ \sin l'' - \operatorname{tang}p''.\ \sin l'}{\operatorname{tang}p'.\ \cos l'' - \operatorname{tang}p''.\ \cos l'}.$$

Ist die Länge des Knotens durch die Gleichung [z''] gegeben: so erhält man die Neigung der Bahn durch die Gleichung [z]. Aus den Gleichungen [z'] und [z''] ersieht man, daß zwei Beobachtungen zur Erhaltung der Länge des Knotens und der Neigung der Bahn hinreichend sind. Durch die Beobachtungen erhält man aber die geocentrische Lage des Himmelskörpers, da im Gegentheil hier die heliocentrische gefordert wird. Um also von jener zu dieser hier zu gelangen: so muß, wie wir bereits aus §. 32. wissen, die Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne oder von der Erde als bekannt vorausgesetzt werden, was bei den Kometen außerordentlich schwierig, ja ein beinahe bis jetzt noch unüberwindliches Hinderniß ist; denn man weiß weder die Parallaxe, noch die Bewegung dieser Körper um die Sonne, d. h. keines der zwei Principien, welche uns zur Kenntniß der eben genannten Entfernung leiten könnten. Für den Kometen kennt man demnach im Dreiecke SPZ (Fig. 8. Tab. II.) nur zwei Stücke: die Entfernung der Sonne von der Erde und den Winkel SZP, d. h. den Abstand des Kometen von der Sonne, oder den Unterschied zwischen der Länge der Sonne und der geocentrischen Länge des Kometen. Alle, von **Newton** bis auf den heutigen Tag von verschiedenen Astronomen und Geometern, zur Ueberwindung dieses Hindernisses, gebrauchten Methoden hängen beinahe immer von der **Positio falsi** ab.

Beispiel. Der ausgezeichnete Komet von 1819 im Monat Juli, beobachtet und berechnet in Wilna, hatte den 6. Juli

n. S. um 12 Uhr mittlerer Zeit, d. h. um Mitternacht, zur heliocentrischen Länge

$$l = 9^z\, 23^\circ\, 22'\, 58'';$$

zur heliocentrischen Breite, nördlich,

$$p = 64^\circ\, 12'\, 1''.$$

Den 14. Juli n. S. hingegen um dieselbe Zeit, zur heliocentrischen Länge

$$l' = 0^z\, 20^\circ\, 25'\, 17'';$$

zur heliocentrischen Breite, nördlich,

$$p' = 80^\circ\, 21'\, 10''.$$

Man suche für diesen Kometen die trigonometrischen Elemente der Bahn, d. h. die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn.

$$\begin{array}{rlrl}
\text{l. tang}\, p = & 0{,}3156818 + & \text{l. tang}\, p' = & 0{,}7695888 + \\
\text{l. sin}\, l' = & 9{,}5427282 + & \text{l. sin}\, l = & 9{,}9627830 - \\
\text{l.}(1) & 9{,}8584100 + & & 0{,}7323718 - \\
(1) & 0{,}7218 & (2) & 5{,}3996 -
\end{array}$$

$$(1) - (2) = 6{,}1214 +$$

$$\begin{array}{rlrl}
\text{l. tang}\, p = & 0{,}3156818 + & \text{l. tang}\, p' = & 0{,}7695888 + \\
\text{l. cos}\, l' = & 9{,}9718100 + & \text{l. cos}\, l = & 9{,}5986505 + \\
\text{l.}(3) & 0{,}2874918 + & \text{l.}(4) & 0{,}3682393 + \\
(3) & 1{,}9386 & (4) & 2{,}3347
\end{array}$$

$$(3) - (4) = -0{,}3961.$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l.}\, 6{,}1214 = & 0{,}7868508 + \\
\text{l.}\, 0{,}3961 = & 9{,}5978048 - \\
\text{l. tang}\, \Omega = & 1{,}1890460 -
\end{array}$$

$\Omega = 180^\circ - (86^\circ\, 17'\, 51'')$ der niedersteig. Knoten.

$\Omega = 360^\circ - (86^\circ\, 17'\, 51'')$ der aufsteigend. Knoten.

$= 9^z\, 3^\circ\, 42'\, 9''$

$$\begin{array}{rlrl}
l = & 9^z\, 23^\circ\, 22'\, 58'' & l' = & 0^z\, 20^\circ\, 25'\, 17'' \\
\Omega = & 9^z\, 3^\circ\, 42'\, 9'' & \Omega = & 9^z\, 3^\circ\, 42'\, 9'' \\
l - \Omega = & 0^z\, 19^\circ\, 40'\, 49''. & l' - \Omega = & 3^z\, 16^\circ\, 43'\, 8''
\end{array}$$

$l - \Omega$, $l' - \Omega$, sind die ecliptischen Argumente der Breite, oder die Abstände des Kometen vom Knoten auf der Ecliptik ge-

rechnet. Nun suche man noch die Neigung der Bahn i vermittelst [z]

$$\text{l. tang } p = 0,3156818 +$$
$$\text{l. sin } (l - \Omega) = \underline{9,5273349 +}$$
$$\text{l. tang } i = 0,7883469 +$$

$$\text{l. tang } p' = 0,7695888 +$$
$$\text{l. sin } (l' - \Omega) = \underline{9,9812420 +}$$
$$\text{l. tang } i = 0,7883468 +$$
$$i = 80^\circ \, 45' \, 12''.$$

Die Neigung der Kometenbahn war also beinahe senkrecht auf die Ecliptik, und mithin muß die Reduction auf die Ecliptik, oder die Differenz zwischen der Länge in der Bahn und der Länge in der Ecliptik, bedeutend und im Wachsen seyn. Man suche nun noch vermittelst der Gleichung I. §. 39. u und u', das heißt die Argumente der Breite in der eigenen Bahn, und z. B. vermittelst der Gleichung VII. desselben §. die Reduction der Bogen der ersten und zweiten Beobachtung auf die Ecliptik.

$$\text{l. tang } (l - \Omega) = 9,5534746 +$$
$$\text{l. cos } i = \underline{9,2059757 +}$$
$$\text{l. tang } u = 0,3474989 +$$
$$u = 65^\circ \, 48' \, 26''$$

$$\text{l. tang } (l' - \Omega) = 0,5223380 -$$
$$\text{l. cos } i = \underline{9,2059757 +}$$
$$\text{l. tang } u' = 1,3163623 -$$
$$u' = 180^\circ - (87^\circ \, 14' \, 12'')$$
$$= 92^\circ \, 45' \, 48''.$$

$$\text{l. tang } \tfrac{1}{2} i = 9,9296052 +$$
$$\text{l. tang } p = 0,3156818 +$$
$$\text{l. cos } u = \underline{9,6125805 +}$$
$$\text{l. sin } [u - (l - \Omega)] = 9,8578675 +$$
$$u - (l - \Omega) = 46^\circ \, 7' \, 40''.$$

Staatliche Bibliothek Regensburg

$$\text{l. tang}\,\tfrac{1}{2}\text{i} = 9{,}9296052 +$$
$$\text{l. tang p}' = 0{,}7695888 +$$
$$\text{l. cos u}' = 8{,}6831423 -$$
$$\text{l. sin}\,[\text{u}' - (\text{l}' - \Omega)] = 9{,}3823363 -$$
$$\text{u}' - (\text{l}' - \Omega) = -(13^\circ\, 57'\, 18'').$$

Dieß sind nun die durchaus nöthigen trigonometrischen Elemente einer Kometenbahn, zur Berechnung derselben sowohl in der Parabel als Ellipse.

Staatliche Bibliothek
Regensburg

...metrie enthaltend.

...ptgleichung.

(...und einer Seite des sphärischen Dreiecks.)

...ptgleichung.

a f e

menden Gleichu.

er vorigen Tafel.)

. . . . [5_{v}]. §. 7.

. . . . [5_{IV}]. §. 7.

H. G n nicht enthaltenen Fälle.

M −u)} . . . . [m]. §. 8.

−ω)} . . . . [n]. §. 8.

. . . . [r]. §. 8.

. . . . [s]. §. 8.

S −x)} . . . . [p]. §. 8.

T

Gebrauch

. . . . [L]. §. 17.

§. 13. I.

§. 13. I. $\frac{\frac{1}{2}b.\ \tan g^{3}\frac{1}{2}c}{\sin 3''}\sin 3A - etc.$. [14]. §. 18.

§. 13. II.

. . . . [L']. §. 17.

§. 13. II.

§. 13. II +

§. 13. II + etc.

§. 13. III . . . . [15]. §. 18.

§. 13. III +

§. 13. III + etc.

§. 13. III

§. 13. III reiecke.

§. 13. III . . . . [I]. §. 20.

§. 14. $\frac{\text{ng}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{ng}\frac{1}{2}(A-B)}$ . . . . [II]. §. 20.

§. 14. . . . . [III]. §. 20.

§. 14.

§. 14. . . . . [IV]. §. 20.

T a

vorkommend

C; die	G	
r noch	. . . . [e].	§. 31.
	in ω. . . . . [d].	§. 31.
§. 23.	in M. . . . . [f].	§. 31.
§. 24.	I. örpers in die heliocentrischen.	
§. 25.	G	
	—L). . . . . [1].	§. 32.
§. 26.		
	. . . . [4].	§. 32.
§. 26.	L) / l) . . . . [2].	§. 32.
§. 26.		
	. . . . [3].	§. 32.
§. 27.		
	II körpers in die geocentrischen.	
§. 27.	G (l—L) tang (45° + ψ). . [g″].	§. 33.
§. 28.	. . . . [h].	§. 33.
§. 28.	. . . . [h′].	§. 33.
§. 29.		
§. 29.	. . . . [i].	§. 33.
§. 30.	I und Breite.	

𝔗

gsten vorko

(Fortsetzung

II]. §. 34. os H

l

V]. §. 34. . . . . [A]. §. 35.

cos α'

VI]. §. 34. H

III]. §. 34. undenwinkels.

X]. §. 34.

. . . . [XVI]. §. 36.

3 P + etc. . . . . . . [XVII]. §. 36.

V]. §. 34.

XI]. §. 34. . . . . [XVIII]. §. 36.

XII]. §. 34.

μ). . . . . [XIX]. §. 37.

XIII]. §. 34.

q

cos q

$+ \frac{\sin^2 \pi . \sin 2q}{\sin 2''} +$ etc. . [XXI]. §. 37.

IV]. §. 35. cos p'. cos D' / — sin π. cos s. cos N . . . [XXIII]. §. 38.

V]. §. 35.). cos ½ (k + π) / os k . . . . . [XXII]. §. 37.

n f

auf

r Pl

der A

iente

3.
4.
5

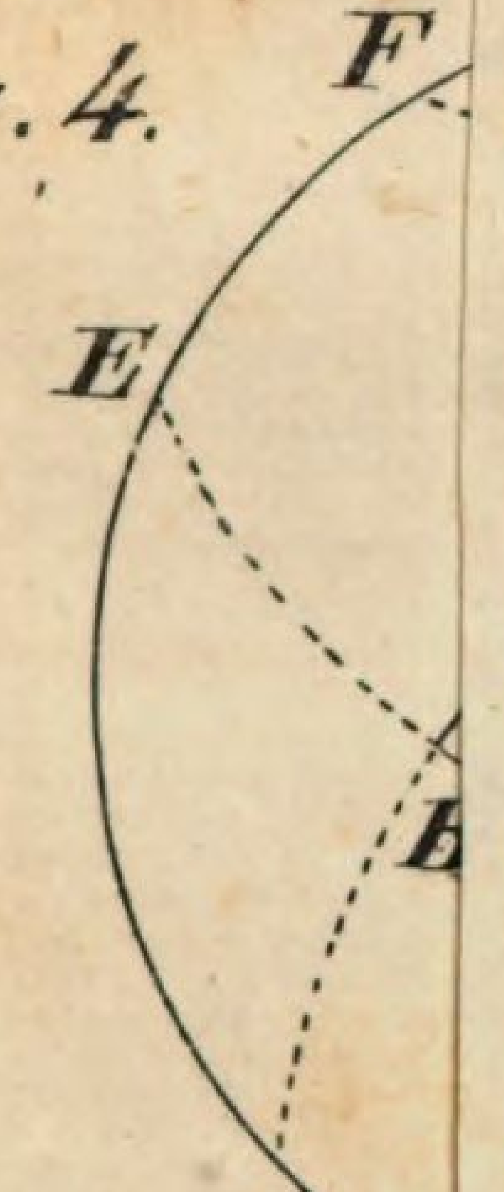
rische

ngswir
des K

. .
. .

Fig. 2.

Fig. 4.



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Śniadecki, Jan

Johann v. Sniadecki's, ... sphaerische Trigonometrie in analytischer Darstellung mit Anwendung auf die Ausmessung der Erde und auf die sphaerische Astronomie ; zum Gebrauch oeffentlicher Vorlesungen

Leipzig 1828

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5093
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112198-5